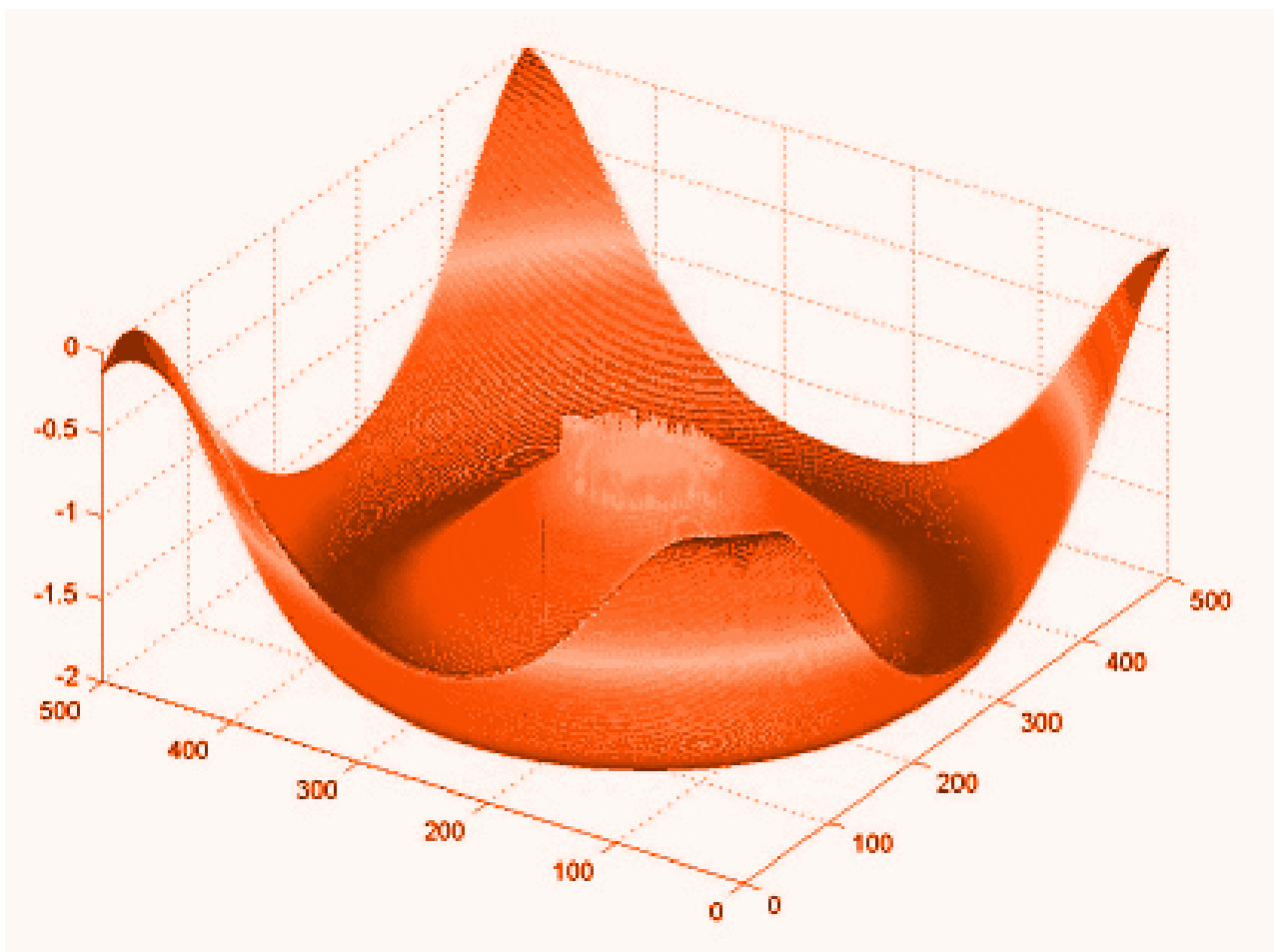




FisMat

Revista de divulgación científica en física y matemática



Escuela Politécnica Nacional
Facultad de Ciencias
Departamentos de Física y Matemáticas

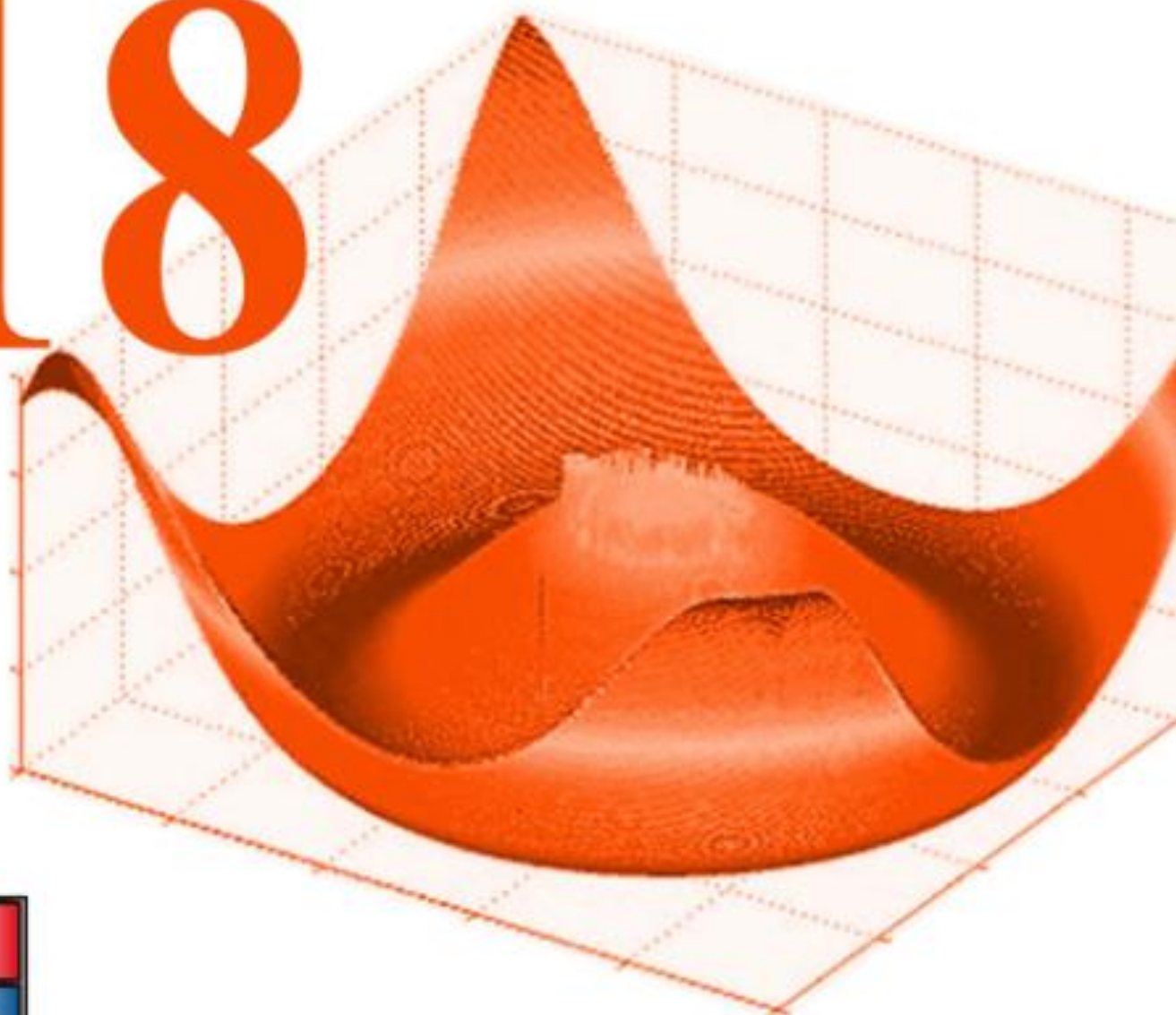
Quito, Ecuador

FISMAT

Revista de divulgación científica en Física y Matemática

Vol: XVIII
Noviembre: 2009

18



**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTOS DE FÍSICA Y MATEMÁTICA
QUITO - ECUADOR**

FisMat: Revista de divulgación científica en física y matemática

PUBLICADA POR
Escuela Politécnica Nacional
Facultad de Ciencias
Departamentos de Matemática y Física
Ladrón de Guevara E11 - 253
Casilla postal 17 - 01 - 2759
Quito, Ecuador

EDITOR
Marco Calahorrano

PUBLICACIÓN DIGITAL
albergada en el repositorio de la Biblioteca Central de la EPN

dirección en línea anterior: www.ciencias.epn.edu.ec

dirección en línea actual (2014): <http://biblioteca.epn.edu.ec/catalogo/default.php>

FisMat

Revista de divulgación científica en física y matemática

Volumen XVIII

Noviembre 2009

Contenidos

1. Existence and Multiplicity of Solutions for Elliptic Problems Arising in Plasma Physics with Indefinite Discontinuous Nonlinearities
Marco Calaborrano I - 12
2. Reviewing the Vacuum Influence on the Cosmological Parameter Definitions
Ericson D. López & Christian L. Vásquez I - 7
3. Análisis de la evolución del margen de intermediación financiera del sistema bancario privado nacional, mediante la metodología ex - post en el período 2003-2007, y la incidencia de sus determinantes
María Eugenia Andrade Trujillo & Renata Salomé García Escobar I - 15
4. Diseño y propuesta de un modelo de Balanced Scorecard en la Cooperativa de Ahorro y Crédito Alianza del Valle, Ltda.
Cintya Lorena Sánchez Gavi I - 11
5. «Eppur si muove»: Galileo entre ciencia y arte
Marco Calaborrano & Patrizia Di Patre I - 8
6. Interacción de fotones con un gas de electrones con impurezas
Jorge Fraga F. & Ericson López I. I - 20

**EXISTENCE AND MULTIPLICITY OF SOLUTIONS
FOR ELLIPTIC PROBLEMS ARISING IN PLASMA
PHYSICS WITH INDEFINITE DISCONTINUOUS
NONLINEARITIES**

MARCO CALAHORRANO

ABSTRACT. In this paper we study the critical points for a locally Lipschitz functional that in some sense will be solutions of an elliptic problem with indefinite discontinuous nonlinearities. We should mention that our results were inspired by the work of Ambrosetti-Badiale [5], Arcoya-Calahorrano [11], Alama-Tarantello [2] and Chang [25]. For the problem studied in [5] we introduce indefinite nonlinearities as in [2] and [12]. To obtain the existence and multiplicity of solutions we use the critical points theory developed by Chang. Applications for Plasma Physics are considered with nonlinearities that change sign.

1. INTRODUCTION

¹ We consider a cylinder with bounded cross-section $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, containing a ionized gas. Let τ_0 be the temperature of the lateral surface of the cylinder; $\delta \geq \tau_0$ that of discharge in the gas; ϑ the thermal conductivity and \mathcal{E} the electric field. Let us assume all these quantities are positive. We denote by v the temperature in the gas and $\sigma = \sigma(x, v)$ denote the electrical conductivity. If we assume that

$$\sigma(x, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } v \leq \delta \\ m(x)p(v) & \text{if } v > \delta \end{cases} \quad (1)$$

then, v satisfies

2000 *Mathematics Subject Classification*. 35J60, 35J65, 35J20, 35J25.

Key words and phrases. indefinite discontinuous nonlinearities, positive solutions, boundary value problems.

©2009 Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias.

Submitted May 30, 2008. Published November 6, 2009.

¹A short version of this paper appears in Proc. Appl. Math. Mech., PAMM, **7**, (2007), [14].

$$\begin{aligned}
-\Delta v &= 0 && \text{if } v \leq \delta \\
-\Delta v &= \frac{|\mathcal{E}|^2}{\vartheta} m(x)p(v) && \text{if } v > \delta \\
v &= \tau_0 && \text{on } \partial\Omega
\end{aligned} \tag{2}$$

where $\partial\Omega$ is the boundary of Ω . Functions m and p depend on the plasma and will be chosen appropriately. In the following, we assume that $p(s) > 0$ if $s > 0$ and $p(s) = 0$ if $s \leq 0$. The discontinuity of σ in $v = \delta$ is consistent with the fact that the gas is ionized. This is a free boundary problem because the region where $-\Delta v \neq 0$ is a-priori unknown. We also suppose that the function m changes sign in Ω (the indefinite case).

Remark 1.1. *For the last deduction we use the Maxwell equations in the plasma where we induce an electric current. For more details on the equations see G. Cimatti [27], I. Peral [36], and the appendix of the work of R. Teman, where he studies the equilibria equations in the Tokomak [41]. The study of R. Teman is based on C. Mercier deductions in [35].*

In order to transform the free boundary problem in a Dirichlet Boundary Value Problem, let us introduce the Heaviside function h

$$h(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s \leq 0 \\ 1 & \text{if } s > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Setting $u = v - \tau_0$, the equation(2) becomes

$$\begin{aligned}
-\Delta u &= m(x)f_a(u) && \text{if } x \in \Omega \\
u &= 0 && \text{if } x \in \partial\Omega
\end{aligned} \tag{4}$$

where

$$f_a(u) = h(u - a)q(u), \tag{5}$$

$$q(u) = \frac{|\mathcal{E}|^2}{\vartheta} p(u + \tau_0), \tag{6}$$

$$a = \delta - \tau_0. \tag{7}$$

We remark that the function f_a has a simple discontinuity at $u = a$ and $f_a(a) = b$, where

$$b = \frac{|\mathcal{E}|^2}{\vartheta} p(a + \tau_0) > 0, \tag{8}$$

is the size of the jump.

In general, let us consider a problem like

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= m(x)h(u-a)q(u) & \text{if } x \in \Omega \\ u &= 0 & \text{if } x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

where \mathcal{L} stands for the linear second order uniformly elliptic operator, $a > 0$, h denotes the Heaviside function (3) and q satisfies

$$(q1) \quad q \geq 0, \quad q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \quad q \text{ is non-decreasing}$$

$$q(s) \leq \alpha s + c, \quad \text{with } \alpha < \frac{\lambda_1}{\|m\|_\infty}, \text{ and } c \text{ a constant.} \quad (10)$$

Moreover, let

$$b = q(a), \quad T = [0, b] \quad (11)$$

and

$$\Omega_a = \{x \in \Omega : u(x) = a\}. \quad (12)$$

In the following section we will study the existence and multiplicity of solutions for problems related to (9).

Remark 1.2. *Problems with indefinite nonlinearities (continuous case) have been studied by S. Alama, G. Tarantello and M. del Pino [2], [3], [1] H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolcetta, L. Nirenberg [12], D. G. De Figueiredo, J. P. Gossez, P. Ubilla [29], K. Chang and M. Jiang [26]. The case of eigenvalues for indefinite weights was studied by Anane, Chakrone and Moussa [9], M. Cuesta [28], A. Manes and A. M. Micheletti [34]. The semi-linear elliptic equations with discontinuous nonlinearities have been studied by A. Ambrosetti, C. Stuart, K. C. Chang, M. Badiale, M. Struwe, D. Arcoya, etc., see for example [4], [38], [25], [5], [7], [6], [11] for an extensive bibliography. For nonlinear problems with weight see [17], [30].*

2. BASIC RESULTS ON VARIATIONAL METHODS FOR NON-DIFFERENTIABLE FUNCTIONALS

Firstly, we consider a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ($n \geq 2$) with smooth boundary $\partial\Omega$ and $f(s) = f_a(s) = h(s-a)q(s)$, then the problem (4) becomes

$$\begin{aligned} -\Delta u &= m(x)f(u) & \text{if } x \in \Omega \\ u &= 0 & \text{if } x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

where $m \in L^\infty(\Omega)$ changes sign and f is a nonlinear ‘‘upward’’ discontinuous function. More concretely, and for simplicity, we assume that f has only an ‘‘upward’’ discontinuity, i.e.

(f1) There exists an unique $a \in \mathbb{R}^+$ such that $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} - \{a\}, \mathbb{R})$,
 $f(a-) < f(a+) < \infty$, $f(a) \in [f(a-), f(a+)]$.

(f2) There exists $\sigma > 0$ such that

$$|f(s)| \leq C_1 + C_2|s|^\sigma, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$$2 \leq 1 + \sigma < 2^*,$$

where

$$2^* = \begin{cases} \frac{2n}{n-2}, & \text{if } 2 < n, \\ +\infty, & \text{if } n = 2 \end{cases}$$

In order to solve (13) we consider the functional $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} m(x)F(u(x))dx, \quad (14)$$

where $F : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ is

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds$$

and $H_0^1(\Omega)$ is the Sobolev space with the norm, $\|u\| = (\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$.

Observe that I is not Fréchet differentiable (f is discontinuous). However, I is locally Lipschitz continuous because f verifies (f2). In fact, let

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} m(x) \int_0^u f(s)ds dx, \quad (15)$$

and let

$g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $(x, s) \rightarrow g(x, s) = m(x)f(s)$. Then, from (f2) it follows that

$$|g(x, s)| \leq A_1 + A_2|s|^\sigma, \quad (16)$$

with A_1 and A_2 constants.

Therefore, we conclude that Ψ defined by (15) is locally Lipschitz continuous in $L^{\sigma+1}$, (see Chang p. 107 [25]) and hence I .

We say that a function $u \in H_0^1$ is a critical point of I if $0 \in \partial I(u)$, ($\partial I(u)$ generalized gradient of I in u , in the sense of F. H. Clarke, see Chang, p. 104 [25]).

Proposition 2.1. *Let (f1), (f2) be satisfied . If $u \in H_0^1$ is a critical point of I , then*

$$-\Delta u \in [\underline{g}(x, u), \hat{g}(x, u)] \quad \text{a.e. } x \in \Omega \quad (17)$$

where

$$g(x, t) = \min\{g(x, t^+), g(x, t^-)\}, \quad (18)$$

$$\hat{g}(x, t) = \max\{g(x, t^+), g(x, t^-)\}. \quad (19)$$

Proof. (Following the theory of Chang [25]) For $u \in H_0^1(\Omega)$, the generalized gradient of I , $\partial I(u)$, is given by:

$$\partial I(u) = \{-\Delta u\} - \partial\Psi(u), \quad (20)$$

where

$$\partial\Psi(u) \subseteq [\underline{g}(x, u), \hat{g}(x, u)] \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad (21)$$

see Chang [25], pp. 110-111. Hence, if $u \in H_0^1$ critical point of I then $0 \in \partial I(u)$, i.e., $0 \in \{-\Delta u\} - \partial\Psi(u)$, and therefore

$$-\Delta u \in [\underline{g}(x, u), \hat{g}(x, u)] \quad \text{a.e. } x \in \Omega. \quad (22)$$

□

Remark 2.1. (i) In the continuous points of f , $[\underline{g}(x, t), \hat{g}(x, t)] = \{m(x)f(t)\}$, i.e., for all $t \neq a$.

(ii) In the case $m(x) > 0$ see [17] and for $m(x) = 1$ see [5] and [11] when the operator is the p -Laplacian.

Remark 2.2. Notice that, critical points solve the boundary value problem in the multivalued sense. In general, these critical points are not solutions of:

$$-\Delta u = m(x)f(u) \quad x \in \Omega \quad (23)$$

$$u = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (24)$$

If Ω_a has measure zero it is possible to obtain that, the critical points will be solutions a.e. in Ω . In fact, additional assumptions on $m(x)f(u)$ and Ω have to be imposed for that solutions in multivalued sense becomes a solution of (23) (cf. [5], [7], [4], [8]).

Remark 2.3. Problems where $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is a C^1 function with $f(0) < 0$ have been studied by A. Castro, R. Shivaji, A. Kurepa and others in [20], [23], [24] y [21] where they obtain the existence of non-negative solutions for semi-positone problems.

In the next section we present some examples where we study the existence of critical points. We use the above notions and the critical point theory developed by Chang in [25] for locally Lipschitz continuous operator.

3. APPLICATIONS

Example 3.1. We consider the following problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= m(x)f(u) & \text{if } x \in \Omega \\ u &= 0 & \text{if } x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (25)$$

where f satisfies (f1) and m holds the condition:

(m1) $m \in L^\infty(\Omega)$ and m changes sign in Ω

Set $m^+(x) = \max\{m(x), 0\}$, $m^-(x) = \min\{m(x), 0\}$, $\Omega^+ = \{x \in \Omega : m(x) > 0\}$, $\Omega^- = \{x \in \Omega : m(x) < 0\}$ y $\Omega^0 = \{x \in \Omega : m(x) = 0\}$.

We assume also f verifies

(f2') There exist non-negative constant α y β with $\alpha < \frac{\lambda_1}{\|m^+\|_\infty}$, where λ_1 is the first eigenvalue of $-\Delta$ for the homogeneous Dirichlet problem, such that:

$$f(s) \leq \alpha|s| + \beta, \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (26)$$

Note that (f2') is the hypothesis (f2) with $\sigma = 1$, therefore the associate problem will be locally Lipschitz continuous. In this case we have the following proposition

Proposition 3.1. *Problem (25) with f satisfying (f1) and (f2') has at least one solution $u \in H_0^1(\Omega)$ such that*

$$-\Delta u \in [\underline{g}(x, u), \hat{g}(x, u)] \quad a.e. \quad x \in \Omega \quad (27)$$

$$u = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (28)$$

Proof. Notice that

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} m(x) \int_0^u f(s) ds dx, \quad (29)$$

hence we can write Ψ in the form

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} m(x)^+ \int_0^u f(s) ds dx + \int_{\Omega} m(x)^- \int_0^u f(s) ds dx, \quad (30)$$

From the hypothesis (f2'), the above expression and Poincaré inequality we can write for I the following inequality

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\alpha \|m^+\|_\infty}{2\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} m(x)^- F(u) dx - \\ &\quad \beta \|m^+\|_\infty \int_{\Omega} u dx. \end{aligned} \quad (31)$$

Therefore,

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\alpha \|m^+\|_\infty}{2\lambda_1} \|u\|^2 - \hat{\beta} \|u\|_{L^2}, \quad (32)$$

i.e.,

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha \|m^+\|_\infty}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 - \hat{\beta} \|u\|_{L^2}, \quad (33)$$

From this, we deduce that I is coercitive if $0 \leq \alpha < \frac{\lambda_1}{\|m^+\|_\infty}$, with λ_1 the first eigenvalue of $-\Delta$, holds. Now, we observe that from coercitivity of I it follows that functional is bounded below . If I verifies the Palais-Smale condition (PS) in the Chang version, then I will have a minimum in $H_0^1(\Omega)$. In fact, using theorem (3.5) of [25] it follows that

$$c = \inf_{H_0^1(\Omega)} I(u) \quad (34)$$

is a critical value of I . \square

For the convenience of the reader, we give a proof that I satisfies the (PS) condition in the Chang version.

Definition 3.1. *Let X be a reflexive real Banach space. We say that a locally Lipschitz function \mathcal{F} defined on X satisfies the Palais-Smale condition (PS), if any sequence $\{x_n\} \subset X$ along which $|\mathcal{F}(x_n)|$ is bounded and*

$$\Lambda(x_n) = \min_{\omega \in \partial \mathcal{F}(x_n)} \|\omega\|_{X^*} \longrightarrow 0 \quad (35)$$

possesses a convergent subsequence.

Lemma 3.1. *Under the assumption of proposition (3.1) the functional I defined by (14) in $H_0^1(\Omega)$ satisfies the Palais-Smale condition (PS).*

Proof. Let $\{u_n\}$ be a sequence in $H_0^1(\Omega)$ such that

$$|I(u_n)| \text{ is bounded} \quad (36)$$

and

$$\Lambda(u_n) = \min_{\omega \in \partial I(u_n)} \|\omega\|_{H^{-1}(\Omega)} \longrightarrow 0. \quad (37)$$

By the coercivity of I and(36) we have that $\{\|u_n\|\}$ is bounded. Then we can assume (passing through a subsequence) that

$$\{u_n\} \rightharpoonup u \quad (38)$$

weakly in $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, and therefore

$$\{u_n\} \rightarrow u \quad (39)$$

strongly in $L^2(\Omega)$. By definition of Λ and theorem (2.1) of Chang [25] there exists a sequence $\{\omega_n\} \subset H^{-1}(\Omega)$ such that

$$\omega_n \in \partial \Psi(u_n)_{L^2(\Omega)} \quad (40)$$

and hence

$$\omega_n \in \partial \Psi(u_n) \subset [g(x, u_n), \hat{g}(x, u_n)] \quad a.e. \quad x \in \Omega. \quad (41)$$

Moreover,

$$-\Delta u_n - \omega_n \rightarrow 0 \quad in \quad H^{-1}(\Omega) \quad (42)$$

It is easy to see that $\{\omega_n\}$ is bounded in L^2 , then there exists a subsequence $\{\omega_{n_k}\}$ which is convergent in $H^{-1}(\Omega)$, since $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ compactly.

Let $\omega \in H^{-1}(\Omega)$ be the limit, i.e.,

$$\omega_{n_k} \rightarrow \omega \quad \text{in } H^{-1}(\Omega). \quad (43)$$

Then,

$$-\Delta u_{n_k} \rightarrow \omega \quad \text{in } H^{-1}(\Omega) \quad (44)$$

and therefore

$$u_{n_k} \rightarrow (-\Delta)^{-1}\omega \quad \text{in } H_0^1(\Omega). \quad (45)$$

□

Example 3.2. *In this example, we study the version of the plasma confinement problem (13) when the nonlinearity is indefinite. For this reason, we assume (f1), (f2'), (m1) and f satisfies*

(f3) $f(s) \equiv 0$, for all $s \in]-\infty, a]$, $f(a^+) = b$ and f is non decreasing.

and

(m2) Ω^+ is a C^1 domain such that $\Omega^+ \subset\subset \Omega$

In the following, we will prove that under the hypotheses above the problem

$$-\Delta u \in [g(x, u), \hat{g}(x, u)] \quad \text{a.e. } x \in \Omega \quad (46)$$

$$u = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad (47)$$

has at least two different non zero solutions in $H_0^1(\Omega)$.

To prove this, we use the following lemmas

Lemma 3.2. *Let (f1), (f2'), (f3), (m1), (m2) hold. If*

$$\frac{b}{a} > \frac{2\|m^+\|_\infty |\Omega^+| \bar{\lambda}_1 \int_{\Omega^+} \bar{\phi}_1^2}{(\int_{\Omega^+} m(x) \bar{\phi}_1)^2}, \quad (48)$$

then there exist $\delta_0 \in \mathbb{R}$ and $\hat{\phi}_1 \in H_0^1(\Omega)$ such that $I(\delta_0 \hat{\phi}_1) < 0$.

Proof. Let $\bar{\phi}_1$ be the first eigenfunction of $-\Delta$ in Ω^+ , i.e.

$$-\Delta \bar{\phi}_1 = \bar{\lambda}_1 \bar{\phi}_1, \quad \text{in } \Omega^+ \quad (49)$$

$$\bar{\phi}_1 = 0 \quad x \in \partial\Omega^+ \quad (50)$$

and $\|\bar{\phi}_1\|_\infty = 1$. Let $\hat{\phi}_1$ be the prolongation of $\bar{\phi}_1$ by zero in $\mathbb{R}^n - \Omega^+$. By hypothesis (f3) we have

$$F(\delta \hat{\phi}_1) \geq b(\delta \hat{\phi}_1 - a), \quad (51)$$

then

$$I(\delta \hat{\phi}_1) \leq \frac{1}{2} \delta^2 \|\hat{\phi}_1\|^2 - \int_{\Omega^+} m(x) b(\delta \hat{\phi}_1 - a) dx. \quad (52)$$

and therefore

$$I(\delta\hat{\phi}_1) \leq \frac{1}{2}\delta^2\bar{\lambda}_1 \int_{\Omega^+} \bar{\phi}_1^2 - b\delta \int_{\Omega^+} m(x)\bar{\phi}_1 dx + ba\|m^+\|_\infty|\Omega^+|. \quad (53)$$

Taking

$$\delta_0 = \frac{b \int_{\Omega^+} m(x)\bar{\phi}_1 dx}{\bar{\lambda}_1 \int_{\Omega^+} \bar{\phi}_1^2}, \quad (54)$$

we obtain

$$I(\delta_0\hat{\phi}_1) \leq -\frac{1}{2} \frac{b^2 \left(\int_{\Omega^+} m(x)\bar{\phi}_1 dx\right)^2}{\bar{\lambda}_1 \int_{\Omega^+} \bar{\phi}_1^2} + ba\|m^+\|_\infty|\Omega^+| \quad (55)$$

By the inequality (55) and hypothesis (48) we obtain $I(\delta_0\hat{\phi}_1) < 0$ \square

In the next lemma we prove the geometric of mountain pass.

Lemma 3.3. *There exists $R > 0$ such that, for all $u \in H_0^1(\Omega)$ with $\|u\| = R$, $I(u) > 0$*

Proof. The proof follows from (f3) and (f2'). See Rabinowitz [37]. \square

Finally, we can prove the following theorem:

Theorem 3.1. *Let us assume (f1), (f2'), (f3), (m1), (m2) and (48) the problem(46), (47) has at least two distinct non-zero solutions in $H_0^1(\Omega)$.*

Proof. For $a > 0$ is clear that $u = 0$ is a local minimum of I . By proposition (3.1) we obtain that there exists a global minimum of I , $v \neq 0$ in $H_0^1(\Omega)$. To get another solution $w \neq 0$, we use the Mountain Pass Theorem of Ambrosetti-Rabinowitz in the Chang's version (ARCh). In fact, from lemmas (3.2), (3.3), (3.1) and theorem (ARCh) the result follows. \square

Acknowledgments

This work was partially done during a research stay of the author to the Centro De Giorgi of the Scuola Normale Superiore di Pisa. I also thank this institution for the kind hospitality, in particular to Prof. Sergio Spagnolo of the Dep. of Mathematics Leonida Tonelli of Pisa.

REFERENCES

- [1] S. Alama, M. Del Pino, *Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via Morse theory and linking*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **13**, (1996), 95–115.
- [2] S. Alama, G. Tarantello, *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities*, Cal. Var., **1**, (1993), 439–475.
- [3] S. Alama, G. Tarantello, *Elliptic Problems with Nonlinearities Indefinite in Sign*, Journal of Functional Analysis, **141**, (1996), 159–215.
- [4] A. Ambrosetti, *Critical Points and Nonlinear Variational Problems*, Cours de la Chaire Lagrange, Mémoire (nouvelle série) N° 49, Supplément au Bulletin de la Société Mathématique de France, **120**, (1992), 1–139.
- [5] A. Ambrosetti, M. Badiale, *The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl., **140** (1989), 363–373.
- [6] A. Ambrosetti, M. Calahorrano, F. Dobarro, *Global branching for discontinuous problems*, Comment Math. Univ. Carolina, **31**, (1990), 213–222.
- [7] A. Ambrosetti, M. Struwe, *Existence of steady vortex rings in an ideal fluid*, Arch. Rat. Mech. Anal., **108** (1989), 97–109.
- [8] A. Ambrosetti, R.E.L. Turner, *Some Discontinuous variational problems*, Diff. and Integral Equations, **1** (1988), 341–349.
- [9] A. Anane, O. Chakrone, M. Moussa, *Spectrum of one dimensional p -Laplacian Operator with indefinite weight*, EJQTDE, **17**, (2002), 1–11.
- [10] D. Arcoya, M. Calahorrano, *Multivalued nonpositone problems*. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei Mat. Appl. **9**, **1**, no. **2**, (1990), 117–123.
- [11] D. Arcoya, M. Calahorrano, *Some Discontinuous Problems with a Quasilinear Operator*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **187**, (1994), 1059–1072.
- [12] H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolcetta, L. Nirenberg, *Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems*, NoDEA, **2**, (1995), 553–572.
- [13] M. Calahorrano, *Existencia de soluciones positivas para problemas no lineales con discontinuidades indefinidas*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, **13**, (2007), 95–101.
- [14] M. Calahorrano, *Existence and multiplicity of solutions for elliptic problems with indefinite discontinuous nonlinearities*, PAMM, Proc. Appl. Math. Mech., **7**, (2007), 1040303–1040304.
- [15] M. Calahorrano, F. Dobarro, *Multiple Solutions for Inhomogeneous Elliptic Problems Arising in Astrophysics*, Math. Mod. and Methods Applied Sciences, **3**, (1993), 217–230.
- [16] M. Calahorrano, S. González, *Existencia de soluciones débiles para un problema con parte no lineal discontinua y operador asociado de tipo p -Laplaciano*, I+D Innovación, **7**, **14**, (2004), 14–34.
- [17] M. Calahorrano, J. Mayorga, *Un problema discontinuo con operador cuasilineal*, Revista Colombiana de Matemáticas, **35**, (2001), 1–11.
- [18] M. Calahorrano, H. Mena, *Multiple solutions for Inhomogeneous Nonlinear Elliptic Problems Arising in Astrophysics*, Electronic Journal of Differential Equations, **49**, (2004), 1–10.

- [19] M. Calahorrano, H. Mena, *Remarks on Inhomogeneous Elliptic Problems arising in Astrophysics*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **19** (2005), 1–12; <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/>.
- [20] A. Castro, *Non negative solutions for non-positone problems*, Lect. College on Variational Methods, ICTP, Trieste, (1988) 1–12.
- [21] A. Castro, A. Kurepa, *Energy analysis of a nonlinear singular differential equation and applications*, Rev. Colombiana Mat., **21**, (1987), 155–166.
- [22] A. Castro, C. Maya, R. Shivaji, *Nonlinear eigenvalue problems with semipositone structure*, EJDE, **Conf. 05**, (2000), 33–49.
- [23] A. Castro, R. Shivaji, *Nonnegative solutions for a class of nonpositone problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **108**, (1988), 291–302.
- [24] A. Castro, R. Shivaji, *Nonnegative solutions for a class of radially symmetric nonpositone problems*, Proc. Amer. Math. Soc., **106**, (1989), 735–740.
- [25] K. C. Chang, *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl., **80**, (1981), 102–129.
- [26] K. C. Chang, M.Y. Jiang, *Dirichlet problem with indefinite nonlinearities*, Calculus of Variations, **20**, (2004), 257–282.
- [27] G. Cimatti, *A nonlinear elliptic eigenvalue problem for the Elenbaas equation*, Boll. U.M.I., **2-B**, (1979), 555–565.
- [28] M. Cuesta, *Eigenvalue problems for the p -Laplacian with indefinite weights*, Electronic Journal of Differential Equations, **33**, (2001), 1–9.
- [29] D. G. de Figueiredo, J. P. Gossez, P. Ubilla, *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems*, Journal of Functional Analysis, **199**, (2003), 452–467.
- [30] M. García-Huidobro, R. Manásevich, C. Yarur, *Some results about positive solutions of a nonlinear equation with a weighted Laplacian*, Bol. Soc. Parana. Mat., **22**, (2004), 57–65.
- [31] H. Gourgeon, J. Mossino, *Sur un problème à frontière libre de la physique des plasma*, Annales de l'institut Fourier, **29**, (1979), 127–141.
- [32] H. Grand, P. N. Hu, D. C. Stevens, *Adiabatic evolution of plasma equilibrium*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **72**, (1975), 3789–3793.
- [33] R. Manásevich, F. Zanolin, *Time-mappings and multiplicity of solutions for the one-dimensional p -Laplacian*, Nonlinear Anal., **21**, (1993), 269–291.
- [34] A. Manes, A.M. Micheletti, *Un'estensione della teoria variazionale classica degli autovalori per operatori ellittici del secondo ordine*, Boll. Un. Mat. Ital., **7**, (1973), 285–301.
- [35] C. Mercier, *The magnetohydrodynamic approach to the problem of plasma confinement in closed magnetic configurations*, Publications of EURATOM C.E.A., Luxembourg, 1974.
- [36] I. Peral Alonso, *Métodos Variacionales y Ecuaciones en derivadas Parciales*, Universidad de Almería, notas de un curso, 1998; [http : //www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ireneo/ALMERIA1.pdf](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ireneo/ALMERIA1.pdf)
- [37] P.H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, **CBMS 65**, American Mathematical Society, 1986.
- [38] C. Stuart, *Differential equations with discontinuous nonlinearities*, Arch. Rat. Mech. Anal., **63**, (1976), 59–75.

- [39] C. Stuart, J. F. Toland, *A variational method for boundary value problems with discontinuous non-linearities*, J. London Math. Soc., **21**, (1980), 319–328.
- [40] R. Temam, *Variational principles related to the equilibrium shape of a confined plasma in an axisymmetric torus*, Plasma Physics, **17**, (1975), 707–711.
- [41] R. Temam, *A nonlinear Eigenvalue problem : the shape at equilibrium of a confined plasma*, Arch. Rational Mech. Anal., **60**, (1975), 51–73.

MARCO CALAHORRANO

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL, FACULTAD DE CIENCIAS, DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA, LADRÓN DE GUEVARA E11-253, APARTADO 17-01-2759, QUITO,
ECUADOR

E-mail address: marco.calahorrano@epn.edu.ec

REVIEWING THE VACUUM INFLUENCE ON THE COSMOLOGICAL PARAMETER DEFINITIONS

ERICSON D. LÓPEZ
CHRISTIAN L. VÁSCONEZ

ABSTRACT. Currently, observational measurements of cosmological parameters have shown an expanding and accelerated universe, this particular phenomenon can be reviewed in two different ways: from a physical point of view and from an astronomical one. In this work, we decide analyse the current problem focusing in the physical aspects. Reviewing the Friedmann-Robertson-Walker (FRW) equations in order to give a more consistent definition to the cosmological parameters, we introduce important corrections to the values of these parameters, as a consequence of taking into account the vacuum influence on the cosmological models. Finally, it is presented SN Ia data showing the feasibility of a flat accelerated universe.

1. INTRODUCTION

The cosmological constant problem is near to have 100 years of validity. The constant introduced by Albert Einstein in his field equations plays today a great role inside the modern cosmology. Moreover, the vacuum energy density is not just equal to the energy of visible matter but it is approximately twice as bigger as this one, therefore there is not any reason to neglect the vacuum influence, even in the definition of the fundamental cosmological parameters.

Therefore, modeling the universe's time evolution we must take into consideration the important contribution of the cosmological constant parameter (Λ). Several groups of researches have devoted their efforts to this fundamental problem. Obviously, theorists were involved at first, until technology was ready to measure the cosmological parameters. This process did not take so many years and in 1938 Walter Baade

Key words and phrases. mathematical methods for physics, cosmology, cosmological parameters.

©2009 Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias.

and Fritz Zwicky have pointed out the fact that supernova events are excellent candidates in order to measuring the cosmic expansion. Then, after the discovery of a new type of supernova, SNe Ia, many groups around the globe have provided very useful cosmological data, since the 1980's decade.

Currently, processing the supernova data, two leader teams, *The Supernova Cosmology Project* (SCP) [16] and *The High-Z Supernova Search Team* (HZST) [19], have presented results showing that the universe is dominated not just for mass of celestial bodies but for vacuum energy as well. Moreover, the SCP and HZST groups have proposed more accurated values for the density parameters, providing for $\Omega_M \approx 0.3$, and for $\Omega_\Lambda \approx 0.7$, under the assumption of a flat Universe [19, 16]. Although the observational techniques have evolved enormously since 1999, these values have been firmly confirmed in the last years(e.g. [20]).

Then, new models are needed in which the advances of empirical cosmology must be included (e.g. [17]). In this context, we have devoted the present paper to reviewing the classical definitions of the cosmological parameters, including in these the vacuum influence.

2. THE CRITICAL DENSITY AND THE DENSITY FACTOR

The general metric which describes a dynamic universe, developed by Robertson and Walker is (e.g. [14]):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right) \quad (1)$$

where $a(t)$ is the scale factor, k the curvature parameter, which takes values 0, 1, -1 for representing a flat, close and open geometry, respectively, and (t, r, θ, ϕ) are the coordinates of a point in the space-time region. Here and in what follow, we consider $c = 1$, for the speed of light. The Einstein field equation yields two lineally independent mayor equations: the Friedmann-Robertson-Walker (FRW) equations which govern the dynamical evolution of the Universe:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (2)$$

and

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -8\pi GP, \quad (3)$$

where ρ is the mass density of the universe, P is the related pressure of the universe cross section, Λ is the cosmological constant (CC) and G the gravitational constant.

In the classical literature it is usual that the Hubble's constant is expressed in function of the scale factor as $H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$. And the necessary density in order to maintain an Euclidean geometry is named the critical density (ρ_c). Therefore, in the most general way we can said that $k = 0$ takes place only if $\rho \equiv \rho_c$. Consequently, the first FRW equation (2) will yield in a straightforward way a more consistent definition for the critical density, which is preserving the vacuum influence and can be expressed as:

$$\rho_c(\Lambda) \equiv \frac{3H^2(t) - \Lambda}{8\pi G}. \quad (4)$$

This result presents a critical density that is not just time evolving but it has an explicit contribution of the vacuum energy through out the CC. Moreover, we can relate this new definition for the critical density $\rho_c(\Lambda)$ to the well-known old ρ_c by:

$$\rho_c(\Lambda) = \rho_c - \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (5)$$

here ρ_c is the critical density parameter without the vacuum contribution, i.e., $\rho_c = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$.

The previous redefinition for the critical density (Eq. 4) affects directly to the density factor relation, which is defined as the relation of the density corresponding to an specific manifestation of energy divided by the critical density. In this context, we will also obtain a new expression for the density factor:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad (6)$$

$$\Omega_i = \frac{8\pi G \rho_i}{3H^2(t) - \Lambda} \quad (7)$$

where the condition of components of the Universe is reduced to:

$$\Omega_M(\Lambda) + \Omega_k(\Lambda) = 1 \quad (8)$$

3. THE CURVATURE AND THE DECELERATION PARAMETERS

Adopting the same description as the previous Section and using equation 2, we can express the curvature parameter as follows:

$$k = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho - \frac{3H^2(t) - \Lambda}{8\pi G} \right) a^2, \quad (9)$$

which in terms of the new critical density definition (Eq.4) will be:

$$k = \frac{8\pi G}{3} (\rho - \rho_c(\Lambda)) a^2, \quad (10)$$

which satisfies the original condition of $k = 0$ if and only if $\rho = \rho_c(\Lambda)$.

On the other hand, adding equations 2 and 3, we are available to exhibit the universe density parameter, as a function of the scale factor:

$$\rho + 3P = -\frac{3}{4\pi G} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\Lambda}{3} \right), \quad (11)$$

then, in terms of the Hubble's constant it becomes:

$$\rho + 3P = \frac{3}{4\pi G} Q(t) H^2(t), \quad (12)$$

where we have introduced a new deceleration parameter definition - according to the thinking of this work- which is expressed as:

$$Q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} - \frac{\Lambda}{3H^2(t)}. \quad (13)$$

This improved definition for the deceleration parameter $Q(t)$, includes an important correction due the vacuum contribution to the well-known deceleration parameter $q(t)$. Consecuently, the relationship that connects these deceleration parameter definitions is:

$$Q(t) = q(t) - \frac{\Lambda}{3H^2(t)}. \quad (14)$$

4. THE LUMINOSITY DISTANCE

As the luminosity distance (D_L) for distant objects like supernovae is affected by space-time curvature, it is necessary to express it through the well-known flux-luminosity relationship:

$$F = \frac{L}{4\pi D_L^2}, \quad (15)$$

where F is the flux and L is the luminosity.

Using equation 8 and the definition of the redshift (in function of the scale factor) it is easy to express that:

$$\Omega_k(\Lambda) = -\frac{3k(1+z)^2}{8\pi G\rho} \Omega_M(\Lambda), \quad (16)$$

where z is the redshift. Now, using the first FRW equation (Eq. 1) we are available to derive an expression for the time interval in terms of z :

$$dt = \frac{1}{1+z} \left[\frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{1-\Omega_M} (1+z)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Pointing out that the above relation is an analytical expression, which has been obtained directly from basis equations without any numerical approximation.

We have noted that the classical expression used for computing the luminosity distance can be modified. The light is propagating in a curved hyperspace and its geometry is determined by the Robertson-Walker metric. Therefore, the flux is affected by the intrinsic geometry of the space-time where the radiation is traveling through. In this context, taking into account the geodesic trajectories for the three values of the curvature parameter and using the previous derived expression for the time interval (Eq. 17), we are available to derive a modified relationship for the calculus of the luminosity distance. This analytical expression has the form:

$$d_L = a_0(1+z) \sin n \int_0^z \frac{1}{a_0} \left[\frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{1-\Omega_M} (1+z)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} dz, \quad (18)$$

where we have adopted the notation as follows:

$$\sin n(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{if } k = 1 \\ \sinh(x) & \text{if } k = -1 \\ x & \text{if } k = 0 \end{cases} \quad (19)$$

5. AN ACCELERATED AND FLAT UNIVERSE

In this Section we focus our attention on using the last analytical luminosity distance form (Eq. 18). When $k = 0$ we have a quite simple relationship of the luminosity distance:

$$d_L = z(1+z) \left(\frac{\Lambda}{3} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Now, using the presented measurements by [13]. Related with the datasets of new, old and combined high-redshift supernovae.

With all these arguments, the mean valued obtained for the cosmological constant in the actual work is: $\Lambda \approx 1,60324 \times 10^{-52} \frac{1}{m^2}$ (Fig. 1).

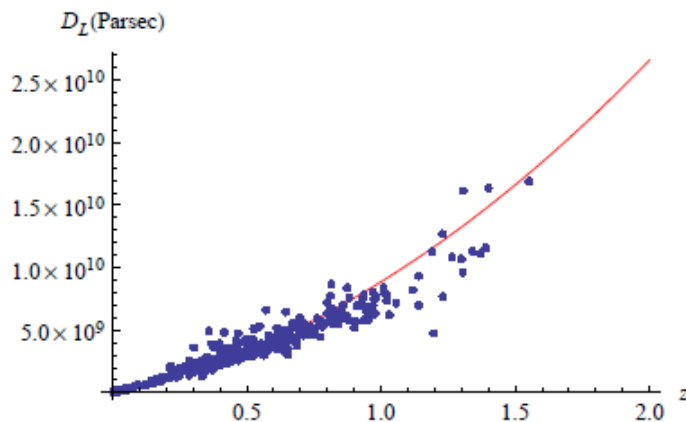


FIGURE 1. Old, new and combined supernova datasets, from [13]

6. DISCUSSION

The presented corrections have several important implications in the future treatment of the cosmological data. Moreover, the new relationship for the critical density (Eq. 4) affects directly the way how we treat the vacuum energy influence into the different models of the Universe. In fact, this redefinition is avoiding the currently misconception that relate a flat geometry model to a $\Lambda = 0$ value.

In this work we have introduced corrections into the definition of two fundamental cosmological parameters. They are for the critical density (Eq. 4) and for the deceleration parameter (Eq. 12). This improvement leads us to modify the habitual relation for the critical density and also to reinterpreting the meaning of the deceleration parameter.

The action of vacuum energy to describe the dynamical evolution of the Universe can not be neglected. We have shown that the well-known value for the CC is of the order of $3H_0^2$, therefore, there is not a reason for discarding this term from the calculations. Consequently, this term must be maintained in equation 4 as a more realistic definition for the critical density.

Although we have introduced corrections to the deceleration parameter relationship, its value must to be provided by the current observations.

It is in preparation a second part of this paper, where we shall use the new cosmological parameters definitions introduced here in order to the explore the consequences of deriving values for the CC using the supernovae data.

REFERENCES

- [1] Basu, D., 1994, *Early history of cosmology*, Indian Sci. Cruiser
- [2] Buote, D. A., et al. 2006, astro-ph/0610135v1
- [3] Carlberg, R., et al. 1995, astro-ph/9509034v1
- [4] Carroll, S. M., Press, W. H., & Turner, E. L. 1992, ARA&A, 30, 499
- [5] Carroll, S. M., 1997, *Lecture Notes on General Relativity*, University of California.
- [6] Carroll, S. M., 1998, *Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics*, University of Chicago
- [7] Conley, A., et al. 2006, astro-ph/0602411 v2
- [8] Freedman, W. L., et al. 1998, astro-ph/9801080 v1
- [9] Goobar, A., & Perlmutter, S., astro-ph/9505022 v1
- [10] Hook, I. M., et al. 2005, astro-ph/0509041 v1
- [11] Islam, J. N., 1991, *An Introduction to Mathematical Cosmology*, Cambridge University Press.
- [12] Kim, A., Goobar, A., & Perlmutter, S. 1996, PASP, 108, 190
- [13] Kowalski, M., et al. 2008, arXiv:0804.4142v1
- [14] Misner, C., Thorne, K., & Wheeler, J., 1973, *Gravitation*, W.H. Freeman and Company San Francisco
- [15] Oke, J. B., & Sandage, A. 1968, ApJ, 154, 21
- [16] Perlmutter, S. et al. (*Supernova Cosmology Group*), 1999, ApJ, 517, 565
- [17] Perlmutter, S., 2003, Phys. Today, April, 53
- [18] Perlmutter, S., 2003, astro-ph/0303428 v1
- [19] Riess, A. G., et al. (*High-Z Supernova Search*) 1998, AJ, 116, 1009.
- [20] Riess, A. G., et al. 2004, astro-ph/0402512 v2
- [21] Riess, A. G. & Livio, M., 2006, astro-ph/0601319 v1
- [22] Schmidt, B. P., et al. 1998, ApJ, in press
- [23] Smoot, G. F., et al. 1992, ApJ, 396, L1
- [24] Spergel, D. N., et al. 2003, ApJ Sup S, 148, 175

ERICSON D. LÓPEZ, OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE QUITO, ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL,, CASILLA POSTAL 17-01-165, QUITO, ECUADOR,
E-mail address: ericsson.lopez@epn.edu.ec

CHRISTIAN L. VÁSCONEZ, OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE QUITO, ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL,, CASILLA POSTAL 17-01-165, QUITO, ECUADOR,
E-mail address: cvasconez@gmail.com

Análisis de la evolución del margen de intermediación financiera del sistema bancario privado nacional, mediante la metodología ex – post en el período 2003-2007, y la incidencia de sus determinantes

Andrade Trujillo María Eugenia
García Escobar Renata Salomé
Ingeniería en Ciencias Económicas y Financieras
Escuela Politécnica Nacional
Dirección: Carlos Bambino, MSc.

Quito – Ecuador
Marzo 2009

Resumen

El presente estudio se centra en el análisis de la evolución del margen de intermediación financiera (MIF), mediante la aplicación de la metodología de márgenes ex-post, con el propósito de evaluar la labor de intermediación que realiza el sistema bancario privado ecuatoriano y la eficiencia con la que este emplea los recursos; para ello, se efectúa un análisis empírico con datos del sistema bancario comprendidos en el período 2003-2007. Además, se realiza el análisis de las variables determinantes en el margen de intermediación financiera mediante la utilización del modelo econométrico de vectores autorregresivos (VAR).

PALABRAS CLAVES: Margen de Intermediación Financiera, tasas implícitas, costos de intermediación, banca, metodología ex – post, modelo de vectores autorregresivos (VAR).

1. INTRODUCCIÓN

La importancia del desarrollo de los sistemas financieros y de la intermediación crediticia radica en que estos contribuyen a apalancar la inversión que escapa de las posibilidades del financiamiento directo, ampliando así la gama de actividades productivas que pueden ser desarrolladas. De esta manera, se aprovecha las mejores oportunidades de inversión, lo que significa que, con igual cantidad de recursos (capital, trabajo, tierra) el país logra una mayor producción, dicho en términos técnicos la relación marginal producto/capital mejora, y esto propicia un crecimiento económico con mayor aceleración.

En este contexto, el margen de intermediación financiera constituye un indicador de la eficiencia¹ con la cual el sistema financiero emplea los recursos en la labor de intermediación que realiza, por lo que su correcta medición adquiere relevancia, más aún cuando se suele afirmar que Ecuador tiene uno de los más altos niveles de márgenes de intermediación en Latinoamérica².

2. ANTECEDENTES

Desde finales de los años setenta, se han registrado varias crisis financieras alrededor de todo el mundo; la mayor parte ocurridas en países subdesarrollados. Efectivamente, la globalización mundial de los mercados y los procesos de liberalización de capitales propiciados por las políticas del Fondo Monetario Internacional facilitaron la expansión de crisis sistémicas y el contagio de varios procesos de fracaso bancario a nivel internacional. Según algunos expertos existen dos tipos de características de las crisis financieras, unas que obedecen al deterioro de las principales variables económicas y de los indicadores microfinancieros y otras que surgen de la contaminación del deterioro de otros sistemas.

La crisis ecuatoriana de 1999 obedeció al primer tipo de crisis, pues la evidencia empírica muestra el deterioro de algunas variables macroeconómicas, la presencia de factores exógenos negativos (guerra con el Perú, caída de los precios del petróleo, crisis en otras economías, fenómeno del Niño) y una profunda crisis política que fueron las condiciones previas al desenlace de la debacle financiera. Es así, que desde 1998 hasta julio de 2002 se registró el cierre de 23 entidades bancarias; es decir, poco más de la mitad de los bancos existentes a principios del período. Esta crisis financiera afectó a todas las esferas de la economía, principalmente a la estructura macroeconómica.

Por ello, el sistema financiero y su interrelación con el equilibrio macroeconómico exigen la implementación de herramientas de mayor precisión al momento de describir la situación actual y, los efectos que el desempeño de las entidades financieras puede tener sobre la salud de las mismas y del sistema en su conjunto.

¹ Tradicionalmente, la eficiencia se asocia a la producción de diversos servicios bancarios a un mínimo costo, lo que debe ser complementado con una medida de calidad y variedad de dichos servicios.

² Resultado del estudio realizado con una muestra de 80 países por Demirgüç-Kunt y Huizinga (1999).

3. MARGEN DE INTERMEDIACIÓN FINANCIERA

Existen varias definiciones y métodos para la medición del margen de intermediación financiera, las que se agrupan en dos enfoques alternativos: aquel que utiliza tasas de interés ex - ante o contractuales, y aquel que utiliza tasas ex - post o implícitas.

3.1. Márgenes ex - ante

El margen ex - ante se calcula como la simple diferencia entre las tasas de interés activas³ contractuales sobre los préstamos (tasa de interés que los establecimientos de crédito cobran por los nuevos préstamos) y las tasas de interés pasivas pactadas por los depósitos captados (tasas de interés que los bancos reconocen por los depósitos).

3.2. Márgenes ex - post

En esta segunda forma de medición, el margen de intermediación financiera es calculado mediante la diferencia de las tasas activa y pasiva implícitas. Existen varios métodos de cálculo para estimar el margen ex - post, la escogencia dependerá del propósito que se persiga con la medición. El margen bruto de intermediación financiera (MBIF) calculado en esta investigación se define como la diferencia entre los ingresos y egresos relacionados con la labor de intermediación como proporción de los activos totales. Esta metodología considera los beneficios de la labor de intermediación teniendo en cuenta que existe una parte de los créditos otorgados que difícilmente se recupera y que puede generar pérdidas.

$$\text{Margen Bruto de Intermediación Financiera} = \frac{\text{Ingresos Financieros}}{\text{Activos Totales}} - \frac{\text{Egresos Financieros}}{\text{Activos Totales}}$$

El margen neto de intermediación financiera va a ser igual al margen bruto de intermediación financiera menos el peso de los gastos de personal, gastos operativos, gastos de provisión y gastos de impuestos y participación a empleados en los activos totales.

Para el cálculo del margen de intermediación financiera se utilizan las cuentas de los balances financieros del sistema bancario privado nacional, en el período 2003-2007 con carácter mensual, y se toma como referencia la nota técnica 5. Tanto los balances como la nota técnica son publicados por la Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador.

Adicionalmente, se realiza la descomposición de la evolución del margen de intermediación financiera en cinco componentes: variación de la cartera productiva, variación de los ingresos por inversiones, variación en el grado de apalancamiento de la cartera, variación de cartera improductiva y bienes recibidos en pago y variación

³ La tasa de interés de colocación depende del plazo de los préstamos, del tipo de prestatario y de otras condiciones del mercado de crédito.

de otros activos. La descomposición se realiza con la aplicación del siguiente diferencial⁴:

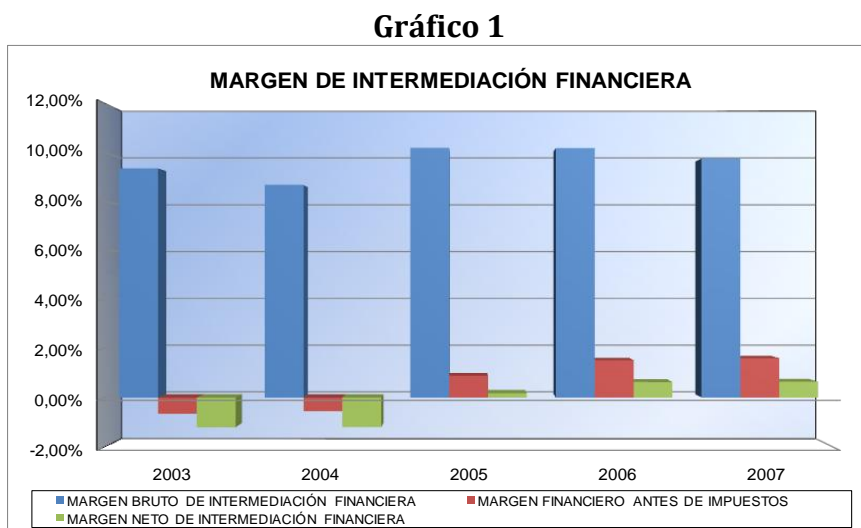
$$\Delta \text{Margen} = \Delta \left[\frac{C_p * (i_c - i_d)}{A_p} \right] * \left[\frac{A_{p,t+1}}{A_{t+1}} \right] + \Delta \left[\frac{I * (i_l - i_d)}{A_p} \right] * \left[\frac{A_{p,t+1}}{A_{t+1}} \right] - \Delta \left[\frac{i_d * (D - C_p - I)}{A_p} \right] * \left[\frac{A_{p,t+1}}{A_{t+1}} \right] - \Delta \left(\frac{C_v + BRP}{A} \right) * \frac{m_t}{A_{p,t}} - \Delta \left(\frac{\text{otros}}{A} \right) * \frac{m_t}{A_{p,t}}$$

La variación de la cartera productiva refleja el cambio tanto de su participación en el total de los activos productivos, como el cambio en su rentabilidad neta. Mientras que, la variación de las inversiones muestra el cambio de los ingresos por inversiones y la variación en el grado de apalancamiento de la cartera está relacionada con el costo de financiar las colocaciones. Por otro lado, la variación en la cartera improductiva y en los bienes recibidos en pago de las entidades financieras y la variación de otros activos, hacen referencia a la materialización del riesgo crediticio.

4. EVOLUCIÓN DEL MARGEN DE INTERMEDIACIÓN FINANCIERA

4.1. MARGEN DE INTERMEDIACIÓN FINANCIERA DEL SISTEMA BANCARIO PRIVADO NACIONAL

Dentro del período⁵ de análisis se observan márgenes brutos de intermediación financiera positivos. Hasta 2004 el margen tendía a la baja, acompañado con márgenes antes de impuestos y neto negativos. A partir de 2005, se observa un salto significativo en el margen bruto, al alza, el cual se mantiene en 2006. En 2007, el margen se reduce.



FUENTE: Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador.

ELABORACIÓN: las autoras.

⁴ La fórmula del diferencial fue elaborado por Michel Janna, Ana María Loboguerrero, Adriana López y Santiago Muñoz. Bogotá, D.C., julio de 2001.

⁵ El margen de intermediación financiera fue calculado mensualmente. Para el análisis se toma como referencia el mes de diciembre de cada año.

Durante esta etapa, la tendencia observada del MBIF estuvo determinada por el comportamiento de la tasa activa implícita. A partir del segundo semestre de 2007 entró en vigencia la Ley de Regulación del Costo Máximo Efectivo del Crédito que provocó la reducción de la tasa activa implícita, ya que disminuyó el ingreso promedio mensual de las instituciones financieras.

Al descomponer la tasa activa implícita, se evidencia que el sistema bancario en conjunto incrementó paulatinamente el cobro de comisiones ganadas e ingresos por servicios como proporción de los activos totales, lo que da muestra de que la banca buscó mecanismos para mantener el nivel de ingresos y por ende la rentabilidad.

En cuanto a la tasa pasiva implícita, la variación registrada por esta tasa fue menor a la variación que presentó la tasa activa implícita durante el período de estudio. Cabe señalar que la tasa pasiva implícita depende de varios factores como son: la composición de los pasivos con costo, principalmente de depósitos a la vista y depósitos a plazo, para los cuales la tasa varía de acuerdo al plazo (a mayor plazo, mayor tasa). Otro factor es el mercado, ya que las tasas ofrecidas por los bancos dependerán del grado de competencia que exista entre ellos para captar recursos, de su tamaño y de su reputación, pues a mayor tamaño y mejor reputación existe mayor credibilidad y por lo tanto, mayor poder de negociación al momento de pactar una tasa. Asimismo, las cifras muestran que los bancos especializados en una línea de crédito tienen menor flexibilidad en el control de sus tasas.

Por otro lado, al realizar la diferenciación y descomposición del margen bruto de intermediación financiera, se observa que la variación del margen estuvo determinada por la variación de la participación de la cartera productiva en los activos productivos y de su rentabilidad neta, es decir, por la variación de los ingresos obtenidos por concepto de cartera. En tanto que, el apalancamiento no varió significativamente, lo que refleja que el costo de fondeo (tasa pasiva implícita) no fue determinante en la variación total del margen. En cuanto al riesgo crediticio, este se incrementó paulatinamente; sin embargo, muestra valores negativos en todo el período. Con esto se demuestra que, la variación del margen se produjo principalmente por la variación de la tasa activa implícita, la misma que es obtenida a partir de los ingresos financieros.

Tabla 1: Diferencial del Margen Bruto de Intermediación Financiera⁶

VARIACIÓN	2003 - 2004	2004 - 2005	2005 - 2006	2006 - 2007
CARTERA PRODUCTIVA	-0,650%	1,298%	-0,516%	-0,278%
INVERSIONES	-0,206%	0,095%	0,370%	-0,231%
APALANCAMIENTO	-0,038%	-0,025%	-0,042%	0,003%
RIESGO CREDITICIO	-0,140%	-0,115%	-0,124%	-0,050%
OTROS	-0,005%	0,023%	0,030%	-0,034%
TOTAL	-0,674%	1,510%	-0,011%	-0,427%

FUENTE: Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador.

ELABORACIÓN: las autoras.

⁶ El diferencial total del margen de intermediación fue calculado entre diciembre de cada año. La variación total del margen es igual a la suma de la variación de la cartera productiva más la variación de las inversiones, menos la variación del grado de apalancamiento, la variación del riesgo crediticio y la variación de otros activos.

Mientras tanto, el margen financiero antes de impuestos registró valores negativos para los años 2003 y 2004, y positivos para los años posteriores. En esta etapa, los gastos de personal y los gastos de operación del sistema bancario aumentaron progresivamente en términos absolutos, sin embargo no crecieron a igual ritmo que los activos totales, por lo que su participación en el margen se redujo; esto refleja mejoramiento de la eficiencia operativa para intermediar. Mientras tanto, los gastos de provisión como su participación en el margen tuvieron un repunte en 2005; este cambio en la serie pudo deberse a que en ese año se realizó la reclasificación contable de la cartera.

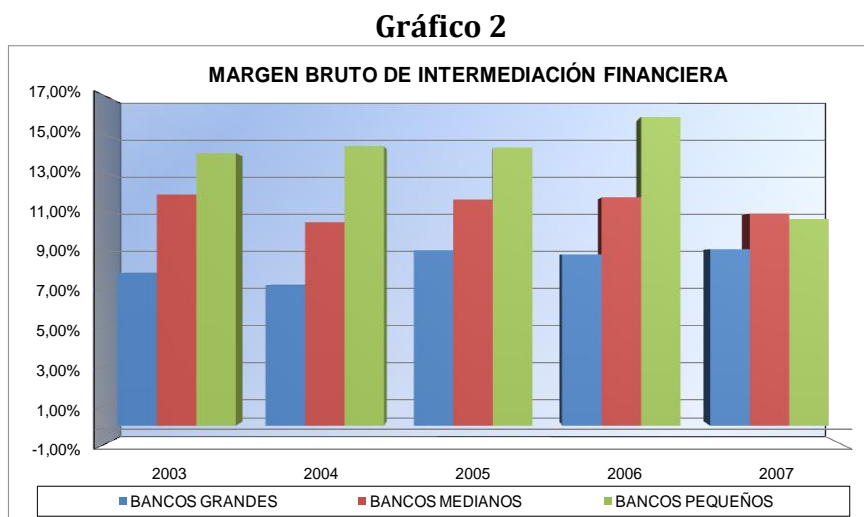
El margen neto de intermediación financiera sigue la tendencia del margen financiero antes de impuestos. Los gastos de impuestos y participación a empleados y su participación en el margen aumentaron a lo largo del período; no obstante, su participación en el margen es la menor de todos los costos de intermediación.

4.2. ANÁLISIS TIPOLÓGICO DEL MARGEN DE INTERMEDIACIÓN FINANCIERA

Dado que los bancos no tienen una composición homogénea de activos y pasivos, la brecha entre las tasas implícitas no se logra explicar únicamente con el análisis del sistema en su conjunto. Por ello, surge la necesidad de estudiar el proceso de intermediación en el que incurren los bancos, de acuerdo a su tamaño y línea de crédito.

4.2.1. Análisis del Margen de Intermediación Financiera por tamaño de banco

Como se observa en el gráfico 2, el margen bruto de intermediación financiera está determinado por el tamaño de banco, a mayor tamaño menor margen.



FUENTE: Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador.

ELABORACIÓN: las autoras.

En cuanto a la tasa activa implícita, el tamaño de banco está correlacionado negativamente con el precio del crédito, a mayor tamaño menor precio. Además, esta

tasa se ubica en niveles superiores a la tasa activa referencial establecida por el Banco Central para el período de estudio.

Los niveles en los que se ubica la tasa activa implícita en el período, se debe a que la tasa máxima convencional no alcanzó a cubrir los costos de intermediación de bancos medianos (2005, 2007) y bancos pequeños (excepto 2004). Esta tasa fue reajustada mediante la elevación del cobro de comisiones e ingresos por servicios, lo que incrementó su participación en los activos totales.

En cuanto al costo de fondeo o tasa pasiva implícita, una mayor tasa responde esencialmente a dos factores: por una parte, a la mayor necesidad de los bancos de incrementar la captación de recursos para acrecentar su solvencia; y por otra, a la calificación otorgada a los bancos por las calificadoras de riesgo, ya que esta influye directamente en la toma de decisiones de los ahorristas, en especial de los corporativos.

En cuanto a los gastos de personal y gastos de operación, su participación en el margen disminuyó paulatinamente y estos son menores mientras mayor es el tamaño del banco; esto revela la aplicación de economías de escala en bancos grandes y medianos, donde a mayor volumen de activos, los costos son menores. Los gastos de provisión, cuya participación en el margen es la más alta para los bancos pequeños, responden a la vulnerabilidad de los segmentos a los que atiende la banca, de ahí la importancia de realizar el análisis del margen de intermediación financiera por destino de crédito.

Tabla 2: Tasas activas y costos de intermediación

TAMAÑO DE BANCO	GRANDES					MEDIANOS					PEQUEÑOS				
	2003	2004	2005	2006	2007	2003	2004	2005	2006	2007	2003	2004	2005	2006	2007
Tasa máxima convencional	17,70%	14,66%	13,43%	13,83%	12,28%	17,70%	14,66%	13,43%	13,83%	12,28%	17,70%	14,66%	13,43%	13,83%	12,28%
Tasa activa implícita	11,24%	10,32%	11,06%	11,20%	11,77%	15,64%	13,55%	14,52%	15,06%	14,64%	18,12%	18,18%	19,85%	21,04%	15,77%
COSTOS															
Tasa pasiva implícita	3,39%	3,11%	2,04%	2,40%	2,70%	3,78%	3,10%	2,90%	3,33%	3,75%	4,12%	3,82%	5,56%	5,19%	5,16%
Gastos de personal en el margen	2,70%	2,48%	2,23%	2,04%	2,11%	3,40%	3,09%	2,90%	2,90%	2,62%	5,59%	5,02%	4,86%	4,87%	3,25%
Gastos de operación en el margen	4,67%	4,36%	3,89%	3,81%	4,08%	5,47%	4,99%	4,95%	4,85%	4,57%	5,36%	5,60%	6,21%	6,00%	4,98%
Gastos de provisión en el margen	2,04%	1,96%	2,38%	1,74%	1,21%	1,82%	1,22%	1,91%	1,63%	1,99%	2,68%	2,71%	3,70%	4,52%	1,93%
Gastos de impuestos y participación a empleados en el margen	0,36%	0,46%	0,60%	0,83%	1,01%	0,96%	0,96%	0,95%	1,06%	0,92%	0,57%	0,88%	0,56%	0,69%	0,67%
TOTAL	13,17%	12,37%	11,14%	10,82%	11,11%	15,43%	13,37%	13,61%	13,76%	13,85%	18,32%	18,02%	20,89%	21,27%	15,99%

FUENTE: Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador.

ELABORACIÓN: las autoras.

Cabe señalar, que los bancos pequeños son quienes registran los mayores ingresos como proporción de los activos totales por concepto de comisiones e ingresos por servicios.

Adicionalmente, en la diferenciación del MBIF se evidencia que para bancos grandes, medianos y pequeños (excepto 2003-2004), la variación del margen es explicada por la variación de los ingresos netos generados por los activos productivos (cartera productiva e inversiones). Para los bancos pequeños, entre 2003 y 2004, la causa principal del aumento del margen fue la reducción de la cartera improductiva.

Tabla 3: Diferencial del MBIF por tamaño de banco

BANCOS	CARTERA PRODUCTIVA	INVERSIONES	APALANCAMIENTO	RIESGO CREDITICIO	OTROS	TOTAL
GRANDES						
2003 - 2004	-0,49%	-0,24%	0,01%	-0,10%	-0,01%	-0,63%
2004 - 2005	1,62%	0,05%	-0,04%	-0,13%	0,05%	1,80%
2005 - 2006	-0,85%	0,45%	-0,03%	-0,16%	0,02%	-0,22%
2006 - 2007	0,40%	-0,22%	-0,02%	-0,05%	-0,02%	0,27%
MEDIANOS						
2003 - 2004	-1,69%	-0,11%	-0,14%	-0,23%	-0,02%	-1,42%
2004 - 2005	0,70%	0,38%	0,00%	-0,05%	-0,04%	1,17%
2005 - 2006	-0,13%	0,19%	-0,07%	-0,04%	0,06%	0,11%
2006 - 2007	-0,54%	-0,32%	0,07%	-0,03%	-0,05%	-0,84%
PEQUEÑOS						
2003 - 2004	-0,01%	-0,01%	-0,16%	-0,23%	0,00%	0,37%
2004 - 2005	0,14%	-0,29%	0,06%	-0,09%	-0,05%	-0,07%
2005 - 2006	1,20%	0,47%	0,05%	-0,03%	0,08%	1,56%
2006 - 2007	-5,41%	-0,18%	-0,08%	-0,18%	-0,10%	-5,24%

FUENTE: Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador.

ELABORACIÓN: las autoras.

Con respecto al margen financiero antes de impuestos, el peso significativo de los gastos (personal, operación y provisión) en el MBIF provocó que este registre valores negativos en 2003 y 2004 para los bancos grandes; valores positivos para los bancos medianos, durante todo el período, y para los bancos pequeños, a excepción de 2005.

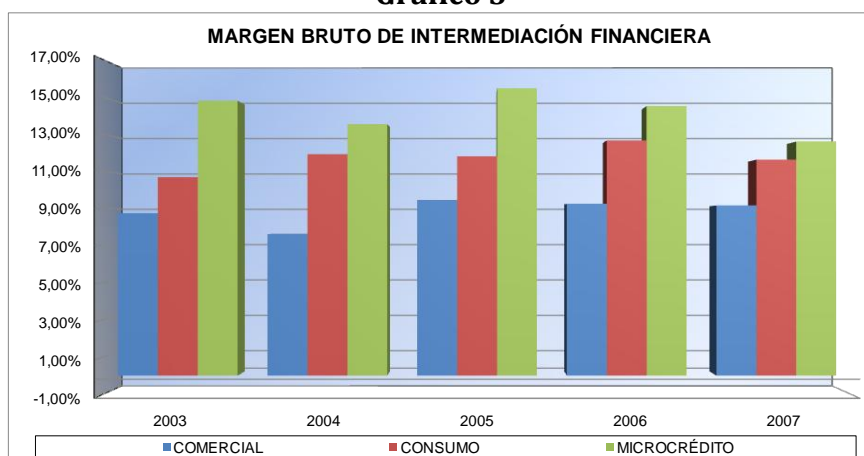
En cuanto al margen neto de intermediación financiera, este refleja que a pesar de los amplios márgenes brutos de intermediación financiera obtenidos por los bancos, esto no se tradujo necesariamente en ganancias netas. La participación de los gastos de impuestos y participación a empleados es la menor de los gastos en el margen, aunque esta creció en el período.

4.2.2. Análisis del Margen de Intermediación Financiera por destino de crédito

Para este análisis se utiliza la clasificación realizada por la Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador a diciembre de 2007. Según esta clasificación los bancos están agrupados en tres segmentos de crédito: comercial, consumo y microcrédito. La línea de crédito vivienda fue incluida a partir de diciembre de 2007 en el segmento consumo.

En el gráfico del MBIF por línea de crédito, se observa diferencias significativas entre los márgenes del segmento comercial, consumo y microcrédito, siendo este último el que registra el mayor margen durante todo el período.

Gráfico 3



FUENTE: Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador.

ELABORACIÓN: las autoras.

Al analizar los costos por destino de crédito se determina que, para los tres segmentos la tasa mínima determinada por dichos costos fue superior a la tasa activa implícita cobrada por los bancos en varios años durante el período de estudio, lo que produjo pérdidas. Además se observa la heterogeneidad en la estructura de costos, siendo el segmento de microcrédito el que registra los costos más altos. Los gastos de mayor representatividad en el margen son los gastos de operación y personal. En cuanto a la participación de los gastos de provisión en el margen, esta disminuye a lo largo del período en los bancos comerciales, y aumenta en los bancos de consumo y microcrédito, siendo superior el incremento en los bancos de consumo; esto se debería a un mayor riesgo en lo que concierne a la recuperación de la cartera de crédito de este segmento. Mientras que, el costo de fondeo es mayor para el segmento de microcrédito, lo que refleja la dificultad de fondearse con depósitos, dada su especialización.

Tabla 4: Tasas activas y costos de intermediación por segmento de crédito

SEGMENTO DE CRÉDITO	COMERCIAL					CONSUMO					MICROCRÉDITO				
	2003	2004	2005	2006	2007	2003	2004	2005	2006	2007	2003	2004	2005	2006	2007
TASAS ACTIVAS															
Tasa máxima convencional	17,70%	14,66%	13,43%	13,83%	12,28%	17,70%	14,66%	13,43%	13,83%	12,28%	17,70%	14,66%	13,43%	13,83%	12,28%
Tasa activa implícita	11,83%	10,49%	11,49%	11,70%	11,89%	15,19%	15,49%	15,45%	16,33%	15,79%	22,31%	19,85%	21,47%	20,74%	19,59%
COSTOS															
Tasa pasiva implícita	3,09%	2,87%	2,04%	2,45%	2,74%	4,52%	3,59%	3,65%	3,68%	4,17%	7,52%	6,32%	6,01%	6,24%	7,00%
Gastos de personal en el margen	2,98%	2,63%	2,39%	2,21%	2,19%	2,72%	2,93%	2,69%	2,69%	2,31%	6,77%	5,94%	5,99%	6,36%	5,21%
Gastos de operación en el margen	4,85%	4,39%	4,01%	3,92%	3,96%	5,18%	5,49%	5,43%	5,41%	5,61%	5,54%	5,32%	5,85%	5,18%	4,71%
Gastos de provisión en el margen	2,08%	1,66%	1,92%	1,42%	1,01%	2,03%	2,51%	3,72%	3,38%	3,33%	0,36%	0,51%	2,44%	2,77%	2,68%
Gastos de impuestos y participación a empleados en el margen	0,48%	0,55%	0,72%	0,91%	1,03%	0,77%	0,98%	0,71%	0,93%	0,84%	0,57%	0,75%	0,54%	0,39%	0,23%
TOTAL	13,49%	12,10%	11,08%	10,91%	10,93%	15,22%	15,50%	16,21%	16,09%	16,26%	20,76%	18,85%	20,84%	20,95%	19,83%

FUENTE: Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador.

ELABORACIÓN: las autoras.

Dado que los costos de intermediación de los bancos de consumo y microcrédito no fueron cubiertos por la tasa máxima convencional (TMC), los bancos aumentaron el costo del crédito a través del cobro de comisiones e ingresos por servicios. Cabe señalar que, los costos y el riesgo se derivan de las características particulares de cada segmento.

Lo analizado anteriormente, se ratifica con la descomposición del margen bruto de intermediación financiera, que muestra que los ingresos obtenidos por concepto de cartera productiva y de inversiones constituyeron la causa primordial de la variación del margen de bancos comerciales, de consumo y de microcrédito.

Tabla 5: Diferencial del MBIF por destino de crédito

BANCOS	CARTERA PRODUCTIVA	INVERSIONES	APALANCAMIENTO	RIESGO CREDITICIO	OTROS	TOTAL
COMERCIAL						
2003 - 2004	-1,16%	-0,17%	-0,04%	-0,14%	-0,02%	-1,12%
2004 - 2005	1,64%	0,12%	-0,02%	-0,10%	0,04%	1,84%
2005 - 2006	-0,92%	0,52%	-0,05%	-0,15%	0,02%	-0,21%
2006 - 2007	0,17%	-0,32%	0,00%	-0,03%	-0,03%	-0,09%
CONSUMO						
2003 - 2004	1,40%	-0,26%	-0,03%	-0,11%	0,05%	1,23%
2004 - 2005	-0,16%	-0,20%	-0,02%	-0,17%	-0,06%	-0,11%
2005 - 2006	0,61%	0,14%	-0,04%	-0,08%	0,02%	0,85%
2006 - 2007	-1,13%	-0,01%	0,03%	-0,15%	0,01%	-1,03%
MICROCRÉDITO						
2003 - 2004	-0,19%	-0,87%	0,18%	-0,02%	0,04%	-1,26%
2004 - 2005	0,71%	1,05%	-0,02%	0,03%	-0,17%	1,93%
2005 - 2006	1,06%	-0,86%	0,27%	0,36%	0,52%	-0,95%
2006 - 2007	-1,78%	-0,35%	0,08%	0,03%	-0,33%	-1,91%

FUENTE: Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador.

ELABORACIÓN: las autoras.

En tanto que, el margen financiero antes de impuestos de los bancos comerciales fue negativo en 2003 y 2004, recuperándose gradualmente en los años siguientes; el margen de los bancos de consumo fue negativo en 2005 y el margen de los bancos de microcrédito presentó valores positivos para todo el período. Por ello, los márgenes netos negativos de los bancos comerciales, de consumo y microcrédito reflejan que no hubo ganancias netas para todo el período.

5. DETERMINACIÓN DE LAS VARIABLES DE MAYOR INFLUENCIA EN EL MARGEN DE INTERMEDIACIÓN FINANCIERA MEDIANTE VECTORES AUTORREGRESIVOS

En esta investigación, se identifican las variables de mayor influencia en el margen de intermediación financiera; mediante la utilización de modelos de vectores autorregresivos (VAR), que al introducir variables exógenas se convierte en un modelo VARX. Cabe señalar que, cuando las variables se encuentran cointegradas, el modelo a estimarse es un vector de corrección de errores con variables exógenas (VECX).

Para el proceso de modelización se contó con una base de 95 variables divididas en tres grupos: variables e indicadores financieros, variables macroeconómicas e índices de concentración⁷. Estas variables se consideran en el análisis debido a su probable influencia en el MIF, de acuerdo a las diferentes referencias bibliográficas consultadas. Para establecer las variables a ser incorporadas en el modelo se realizó una matriz de correlaciones de estas con respecto al margen bruto de intermediación financiera (MBIF)⁸ con una diferencia estacionaria. De la matriz se eligieron las variables que presentaron correlaciones mayores a 0,6 y menores a -0,5, con el fin de seleccionar las variables de mayor correlación lineal y evitar la exclusión de variables que puedan ser significativas en el proceso de modelización.

Para determinar las variables de mayor influencia en el MBIF se utilizó la metodología de Box - Jenkins para modelos vectoriales., con información mensual.

5.1. IDENTIFICACIÓN

En esta etapa se obtienen estimadores para determinar el rezago óptimo del modelo VAR. Estos estimadores son obtenidos a partir de los criterios de Akaike, Hannan-Quinn y Schwarz, que muestran los límites entre los que se encontraría el rezago real del VAR.

El criterio de Akaike encuentra el valor del rezago p que minimiza el error de pronóstico de la matriz de suma de errores al cuadrado, dando como resultado que el rezago p del modelo VAR esté asociado al mínimo valor del criterio de Akaike. El criterio de Hannan-Quinn y Schwarz son estadísticos del rezago p , que dan como resultado que el rezago del modelo VAR esté asociado al mínimo valor de estos criterios.

Tomando en cuenta estos criterios, los rezagos adecuados para realizar el proceso de modelización corresponden al 1 y 2, ya que con estos la distancia entre la densidad del modelo y la densidad de los datos es mínima.

Tabla 6: Rezagos de los modelos VAR según los criterios de selección⁹

Rezago	Log (L)	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-1042,851	NA	1,37E-04	36,512	37,080	36,733
1	-154,469	1255,987	6,17E-14	14,706	24,369*	18,470
2	286,830	380,430*	9,17E-16*	8,316*	27,073	15,623*

FUENTE: SBS y BCE.

ELABORACIÓN: las autoras.

⁷ Los índices de concentración utilizados son: índice de Concentración de Orden k (CRk), índice de Herfindahl-Hirschman (HHI), índice de Hall-Tideman (HTI), índice de Concentración Industrial Comprensivo (CCI), índice de Hannah y Kay (HKI), el inverso de Hannah y Kay (1/HKI), y medida de Entropía de Theil (ET).

⁸ Se trabajará con el MBIF, para determinar las variables de mayor influencia en la ganancia bruta que obtuvo el sistema bancario privado nacional.

⁹ Log (L) (logaritmo de la matriz de varianza covarianza del modelo VAR), LR (λ que prueba la significancia de los parámetros del modelo VAR), FPE (error de predicción final), AIC (criterio de Akaike), SC (criterio de Schwarz) y HQ (criterio de Hannan Quinn).

Una vez seleccionados los rezagos adecuados para el modelo, se procede a realizar la prueba de Causalidad de Granger, para determinar las variables que formarán parte del vector endógeno y exógeno. Las variables endógenas del modelo capturan los comovimientos y la dinámica de sus interrelaciones; mientras que, las variables exógenas transmiten los acontecimientos presentes al modelo vectorial.

Tabla 7: Prueba de Causalidad de Granger

Vector	Variables	
Endógeno	1	GPER_AT
	2	LOG_GRPE
	3	GPRO_AT
	4	MNIF
	5	MBIF
Exógeno	6	GPRO
	7	YF_AT
	8	RG_AT
	9	RC_AT
	10	SR
	11	LOG_RG
	12	YF
	13	GPER
	14	LOG_RC
	15	CG
	16	CG_AT

FUENTE: SBS y BCE.

ELABORACIÓN: las autoras.

Para determinar las relaciones de cointegración existentes en el modelo VAR se utiliza la prueba de la traza y la prueba del máximo valor propio, llamada también contraste de Johansen, donde se determina estadísticamente la presencia de valores propios diferentes de cero en la matriz β , indicando el número de relaciones de cointegración.

Al realizar el contraste de Johansen para todos los modelos de cointegración se determinó que las relaciones de cointegración existentes entre las variables endógenas pueden ser 1.

5.2. ESTIMACIÓN

Los modelos a estimarse son del tipo VECX, puesto que, el vector endógeno está cointegrado y además, se incluyen variables exógenas. Para este estudio, se estimarán 65 modelos resultantes de la combinación de cada una de las variables exógenas con el vector endógeno, para cada uno de los 4 modelos $VEC(\delta, \varepsilon, \mu)$ ¹⁰: $VEC(1,4,1)$, $VEC(1,5,1)$, $VEC(2,4,1)$, $VEC(2,5,1)$; que dan un total de 264 modelos $VECX(\delta, \varepsilon, \mu)$.

¹⁰ La notación $VEC(\delta, \varepsilon, \mu)$ significa que el modelo tiene: δ rezagos, ε modelo de cointegración (donde ε puede ser los modelos 1, 2, 3, 4 o 5) y μ el número de relaciones de cointegración.

5.3. VERIFICACIÓN

De los 264 modelos VECX realizados, se eligieron aquellos que presentan significancia estadística, es decir que, la probabilidad de los estadísticos de Portmanteau¹¹ y Jarque-Bera¹² sea menor que el fractil de una distribución normal al 95% de confianza, probando así la independencia y normalidad de los residuos, respectivamente; además, estos modelos presentan la menor suma de errores al cuadrado.

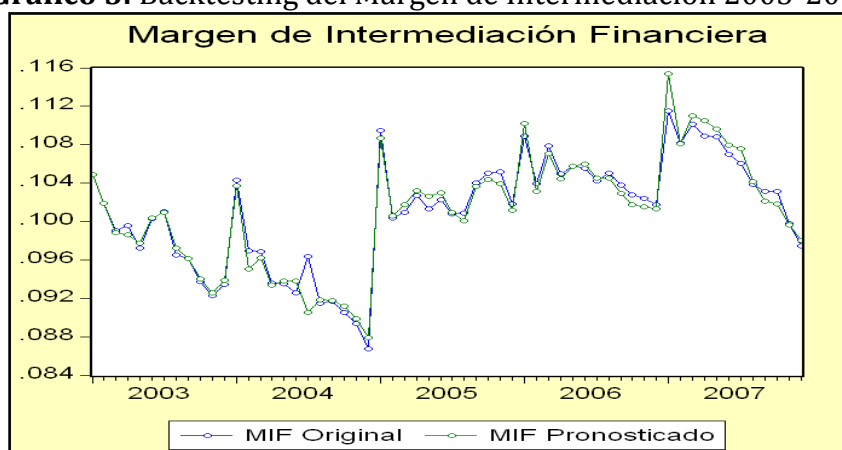
El mejor modelo estimado es el VECX(1,5,1)₅₆, ya que presenta residuos independientes que siguen una ley normal multivariada, y la menor suma de errores al cuadrado.

5.4. MODELO VECX PARA DETERMINAR LAS VARIABLES DE MAYOR INFLUENCIA EN EL MARGEN DE INTERMEDIACIÓN FINANCIERA

De acuerdo a la metodología de Box y Jenkins se deduce que el mejor modelo para determinar las variables de mayor incidencia en el MIF, es el modelo VECX (1, 5, 1)₅₆, cuyas características principales son: modelo autorregresivo con un rezago, la ecuación de cointegración tiene intercepto y tendencia, el modelo del vector autorregresivo presenta intercepto y tendencia, existe una relación de cointegración entre las variables endógenas y las variables exógenas del modelo son: ingresos financieros, gastos de personal, intereses causados, comisiones ganadas y su participación en los activos totales.

En el gráfico 5, se presentan los valores reales y estimados del Margen de Intermediación Financiera, donde se aprecia que el modelo captura la tendencia y evolución del mismo.

Gráfico 5: Backtesting del Margen de Intermediación 2003-2007



FUENTE: SBS y BCE.
ELABORACIÓN: las autoras.

¹¹ El estadístico de Portmanteau prueba la hipótesis nula de que los residuos son independientes.

¹² El estadístico de Jarque-Bera prueba la hipótesis nula de que los residuos sigan una ley normal multivariada.

6. CONCLUSIONES

Del análisis de la evolución del margen de intermediación financiera del sistema bancario privado nacional y sus determinantes, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Al analizar el MIF por tamaño de banco, se encontró que la tasa máxima convencional establecida por el Banco Central del Ecuador no fue suficiente para cubrir los costos de intermediación; por lo que el mecanismo utilizado por los bancos para corregir esta deficiencia fue incrementar la tasa activa implícita a través del aumento del cobro de comisiones e ingresos por servicios. De igual manera sucedió con los bancos de consumo y microcrédito.
- Los costos difieren por tamaño de banco, siendo los de mayor tamaño los que tienen los menores costos de intermediación ya que estos aprovechan economías de escala y esto mejora su eficiencia.
- A pesar de que el margen bruto de intermediación financiera cobrado por los bancos pequeños era el mayor del sistema, esto no se reflejó en la ganancia neta debido a la estructura de costos que se requiere para operar en ciertos segmentos no tradicionales.
- El análisis de costos determina una tasa mínima para que los bancos puedan realizar su labor de intermediación.
- La fijación de techos a las tasas, debe contemplar esta tasa mínima de operación, considerando la heterogeneidad de los bancos del sistema.
- La estructura de costos de intermediación depende de las características y riesgos inherentes a cada segmento de crédito.
- Los amplios márgenes obtenidos por los bancos no siempre se tradujeron en ganancias netas; esto se debió a la alta participación de los costos de los bancos de consumo y microcrédito en el margen, producto del monto que se coloca por operación y de la aplicación de un nivel riguroso de provisiones.
- La aplicación de modelos VECX, permitió determinar las variables e indicadores de mayor influencia en el margen bruto de intermediación financiera; estas son: la participación de los gastos de personal y de provisión en el margen, los gastos de impuestos y participación a empleados, el margen neto de intermediación financiera, los gastos de provisión, la tasa activa implícita, los intereses ganados y su participación en los activos totales, los intereses causados y su participación en los activos totales, el salario real, los ingresos financieros, los gastos de personal, las comisiones ganadas y su participación en los activos totales.
- La reducción del margen de intermediación financiera puede desembocar en restricciones crediticias dado por el desestímulo del sector como consecuencia de la pérdida de rentabilidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Novales, Alfonso. *ECONOMETRÍA*. Madrid-España, Editorial Mc Graw Hill, segunda edición, 1993.
- Greene, William. *ANÁLISIS ECONOMÉTRICO*. Madrid-España, Editorial Prentice Hall, tercera edición, 1999.
- Mejía, Diana Margarita. *EVOLUCIÓN RECIENTE DE LOS MÁRGENES DE INTERMEDIACIÓN*. Bogotá D.C., Investigación e Información Económica #74, 2000.
- Ospina, Sandra Patricia. *LOS EFECTOS DE LA REGULACION EN EL MARGEN DE INTERMEDIACION DE LAS TASAS DE INTERÉS EN COLOMBIA*. Bogotá, Borradores semanales de Economía No. 28, 1995.
- Superintendencia de Bancos. *BALANCES GENERALES BANCOS PRIVADOS*. Publicación mensual.
- Barajas A., Steiner R. y Salazar N.; *INTEREST SPREADS IN BANKING IN COLOMBIA, 1974-1996*. IMF Staff Papers, Vol. 46 N°2, 1999, pp. 196-224.
- Burbano, Silvia y María Belén Freire. *DETERMINANTES DEL SPREAD Y DE LAS TASAS DE INTERÉS EN EL MERCADO BANCARIO DOMÉSTICO*. Banco Central del Ecuador, Nota Técnica N° 73, 2003.
- Camacho E. y L. Mesalles. *MARGEN DE INTERMEDIACIÓN Y EFICIENCIA EN LA BANCA*. San José de Costa Rica, Academia de Centroamérica, 1994, pp. 18, 38, 66-67.
- Demirgüç-Kunt, Asli y Ross Levine. *FINANCIAL STRUCTURE AND ECONOMIC GROWTH: PERSPECTIVES AND LESSONS*. Massachusetts Institute of Technology, 2001, pp. 3-14.
- Escalante Flores, Jeannette Arlene. *“MÁRGENES DE INTERMEDIACIÓN FINANCIERA EN EL SECTOR BANCARIO COSTARRICENSE 2000 - 2003”*. Costa Rica, Universidad de Costa Rica, Maestría en Economía con énfasis en Banca y Mercado de Capitales, 2004.
- <http://www.bce.fin.ec/>
- <http://www.superban.gov.ec/>

Andrade Trujillo María Eugenia
García Escobar Renata Salomé
Ingeniería en Ciencias Económicas y Financieras
Escuela Politécnica Nacional

DISEÑO Y PROPUESTA DE UN MODELO DE BALANCED SCORECARD EN LA COOPERATIVA DE AHORRO Y CRÉDITO ALIANZA DEL VALLE LTDA.

CINTYA LORENA SÁNCHEZ GAVI

RESUMEN. El presente trabajo propone diseñar un modelo de Balanced Scorecard (BSC), para la Cooperativa de Ahorro y Crédito Alianza del Valle Ltda, a través de un diagnóstico en las áreas estratégicas con la finalidad de mejorar la gestión institucional integrando medidas de seguimiento y control de objetivos institucionales.

Después de abordar las consideraciones teóricas que se deben realizar para la realización del modelo, se describe la situación actual de la Cooperativa empleando matrices de evaluación para los análisis de factores internos y externos relacionados con clientes, productos, procesos, en las áreas consideradas estratégicas.

Partiendo de los resultados obtenidos se describe el modelo, tomando en cuenta la visión y la misión de la Cooperativa para un período de tiempo determinado incluyendo medidas de actuación enmarcadas en cada una de las perspectivas.

El modelo consiste en un sistema integrado de indicadores y metas, que permiten mayor consistencia a la planeación estratégica, incluyendo una evaluación financiera, y el análisis del impacto del modelo propuesto en las cuentas del balance.

1. INTRODUCCIÓN

El Balanced Scorecard (BSC) es una técnica que ayuda a trasladar la estrategia en acción, esta herramienta provee a la gerencia de un mapa comprensivo de las operaciones de la Cooperativa y una metodología que facilita la comunicación y entendimiento de las metas y estrategias a todos los niveles de la organización.

Key words and phrases. Balanced Scorecard, Cooperativa de Ahorro y Crédito, cuadro de mando integral.

©2009 Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias.

Sometido: Enero, 2009. Aceptado: Noviembre 8, 2009.

Las etapas principales del Balanced Scorecard son las que se mencionan a continuación:

- * Formular la misión, visión, valores de la organización.
- * Formular el mapa estratégico.
- * Establecer objetivos según las perspectivas del cliente, financiera, procesos, aprendizaje y crecimiento.
- * Establecer indicadores y metas.
- * Establecer planes de acción.

En el citado contexto, el presente estudio diseñará un modelo de BSC bajo la realidad de la Cooperativa de Ahorro y Crédito Alianza del Valle con el objetivo de ayudar a la toma de decisiones efectivas y oportunas mediante el establecimiento y uso adecuado de un conjunto de indicadores, que integren todas las áreas de la institución, controlen la evolución de los factores clave de éxito derivados de la estrategia y lo hagan además, de forma equilibrada, atendiendo a las diferentes perspectivas que lo conforman que son las siguientes: perspectiva del cliente, perspectiva de procesos internos, perspectiva de innovación y aprendizaje y perspectiva financiera.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La Superintendencia de Bancos controla a 39 cooperativas de ahorro y crédito con un saldo de cartera de crédito de 1.121´319.844,78 a dólares a junio del 2008¹, dada la magnitud del movimiento de dinero, es necesario que estas modernicen su modo de operar, logrando eficiencia y eficacia administrativa-financiera, utilizando herramientas modernas de planificación y gestión, para que sean competitivas no solo en el ámbito nacional sino que sean un referente en el contexto internacional.

Las cooperativas de ahorro y crédito incentivan la cooperación económica y social de sus socios y clientes impartiendo una cultura de solidaridad financiera. Además estas entidades promueven y apoyan el fortalecimiento de las finanzas populares, lo que permite ampliar el

¹Fuente: Boletín financiero de la Superintendencia de Bancos y Seguros, diciembre del 2007.

espectro crediticio a las economías locales impulsando la inclusión de dichos sectores en la dinámica productiva.

La Cooperativa de Ahorro y Crédito Alianza del Valle Ltda, tiene el propósito de no sólo cumplir las regulaciones y exigencias normativas, sino además fortalecer su estructura financiera y administrativa que le permita generar ventajas competitivas que le aseguren la sostenibilidad y sustentabilidad, a fin de incrementar su capital de operación y ampliar la oferta de productos y servicios financieros.

La falta de herramientas técnicas para administrar los procesos estratégicos, de operación y de soporte, han generado una elevada exposición al riesgo operativo lo cual podría desencadenar pérdidas económico-financieras, con secuelas en el margen financiero, el valor patrimonial y en la reputación de la institución. Por esta razón es necesario definir un modelo de Balanced Scorecard, a fin de direccionar a la institución hacia la excelencia en la gestión operativa y financiera.

A pesar que la Cooperativa cuenta con amplia trayectoria y planes estratégicos anuales tiene una deficiente gestión operativa e incumplimiento de objetivos pro-puestos, esto le impide desarrollar su posición financiera de una manera adecuada

3. Descripción de las fases del modelo

3.1. Fase de diagnóstico. El estudio parte con una evaluación a la Cooperativa. Aquí se distinguen tres etapas: etapa de insumos, etapa de adecuación, etapa de decisión. A continuación se describen los componentes de las etapas.

ETAPA 1: ETAPA DE INSUMOS

- * Matriz de evaluación de los factores internos EFI
- * Matriz de evaluación de factores externos EFE
- * Matriz de Perfil competitivo MCP

ETAPA 2: LA ETAPA DE ADECUACIÓN

- * Matriz de la posición de la posición estratégica y evaluación de la acción PEYEA

ETAPA 3: DECISIÓN

* Matriz cuantitativa de la planificación estratégica MCP

En la etapa de insumos se unifica la información obtenida en las matrices: EFI, EFE, y MPC, proporcionando información para las siguientes etapas.

La etapa de la adecuación sirve para alinear y formular estrategias viables.

En la etapa de decisión se encuentra la matriz cuantitativa de la planificación, la cual revela las estrategias alternativas proporcionando una base objetiva para seleccionar estrategias específicas

3.2. Fase 2. Resultados obtenidos. La Matriz de la Mejor estrategia, da como resultado que el rumbo de la organización debe ir hacia:

1. Desarrollo de Mercado
2. Penetración de Mercado
3. Desarrollo de Productos

Sin embargo, dentro de análisis de las Matrices Situacionales, se tienen los siguientes puntos a considerar a nivel del análisis interno:

1. Saludable estructura financiera
2. Altos costos fijos y gasto operativo
3. Falta de compromiso continuo para satisfacción del socio/cliente

Esta posición sugiere que la Cooperativa debe enfocarse en el desarrollo de mercado y productos, con la opción de consolidarse dentro de sus mercados actuales o de abrir nuevas agencias; sin embargo, se puede observar que actualmente se tienen altos costos fijos por el mantenimiento de las agencias.

La decisión de la creación de una nueva agencia² debe tomar en cuenta la existencia de nichos de mercado insatisfechos, los cuales se encuentran en parte en los lugares geográficos donde la organización no brinda el servicio. Del análisis está demostrado que la Cooperativa tiene la capacidad de apalancarse en sus costos fijos para generar más negocio, sin embargo debe prepararse para capturar, retener y fidelizar a sus clientes. Esto permitirá que los costos fijos (derivados de sus costos de operación) sean muy inferiores en relación al volumen de negocios.

Otra consideración importante es que la Cooperativa no debe alejarse de sus ventajas competitivas obtenidas, por lo cual es necesario reforzar los aspectos generadores de dicha ventaja; esto sugiere concentrar todos los recursos y esfuerzos para atender de manera satisfactoria a sus clientes mediante su infraestructura actual.

Para lograr este objetivo es necesario realizar un cambio cultural y organizacional enfocado al cliente a través de:

* Desarrollo de una Cultura de Servicio al Cliente y adaptación de la estructura y procesos hacia la atención y servicio al cliente.

* Desarrollo de Productos y Mercado Actual, mediante campañas locales y alianzas estratégicas locales, apertura de nuevos canales de colocación y captación, y mecanismos de fidelización del cliente.

3.3. Fase 3. Diseño del modelo. El modelo ha sido realizado en base a talleres de trabajo participativos y consensuados donde intervinieron directivos y personal administrativo.

La realización del modelo está en función del diagnóstico interno de la Cooperativa, ello incluye el análisis de sus niveles de cobertura social, la dinámica de sus operaciones financieras, captaciones y colocaciones, su participación y posicionamiento en el mercado, los resultados financieros y los puntos de riesgo que debe superar la Cooperativa en el corto y mediano plazo para su desarrollo y crecimiento sostenido.

Consideraciones iniciales

Inicialmente es necesario definir a donde se quiere llegar; para lo cual se analiza y define la filosofía corporativa.

En la Cooperativa de Ahorro y Crédito Alianza del Valle. Ltda. se realizó una reformulación de la misión, visión, valores corporativos, y el

²Los costos se recuperarían en un plazo superior a dos años -Dato proporcionado por la Unidad de Negocios y Marketing

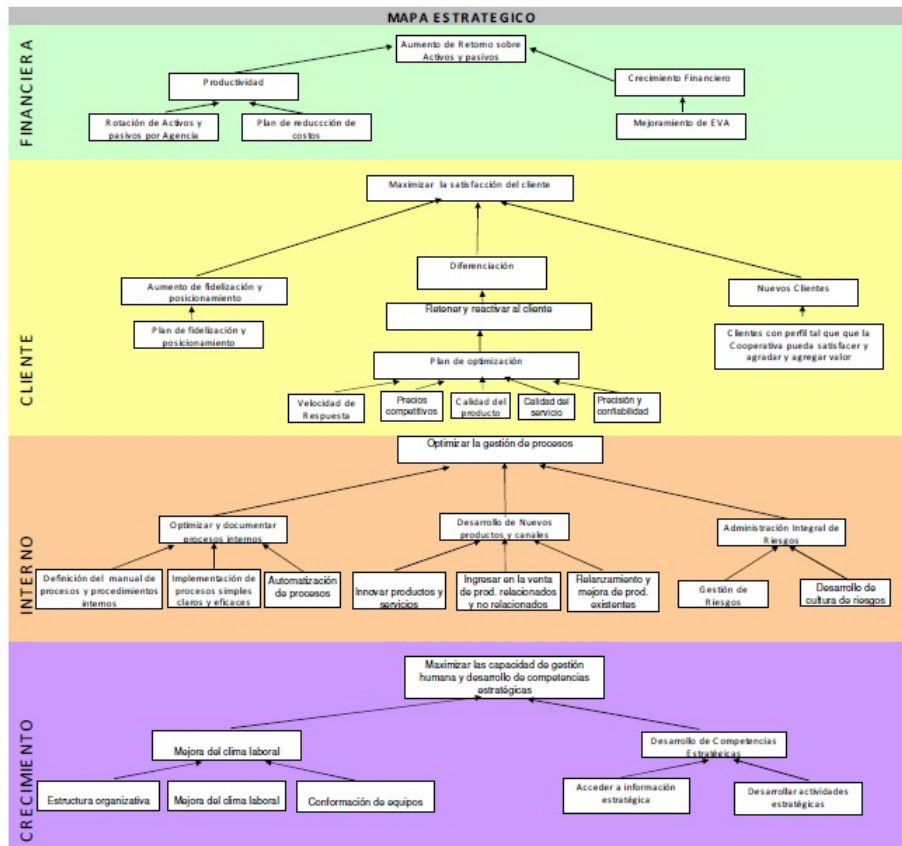


Figura 1. Descripción del BSC para las cuatro perspectivas

planteamiento de políticas institucionales que motiven el cumplimiento de los objetivos propuestos.

Perspectivas del Balanced Scorecard

En la figura (1) se muestran simultáneamente las áreas del Balanced Scorecard para la Cooperativa de Ahorro y Crédito Alianza del Valle Ltda.

Perspectiva del Cliente: Se refiere a la percepción que tienen los clientes de la Cooperativa; con ese objetivo en esta perspectiva se miden las relaciones con los clientes y las expectativas que los mismos tienen sobre los negocios. Además, se toman en cuenta los principales elementos que generan valor para los clientes, para poder así centrarse en los procesos que para ellos son más importantes y que más los satisfacen.

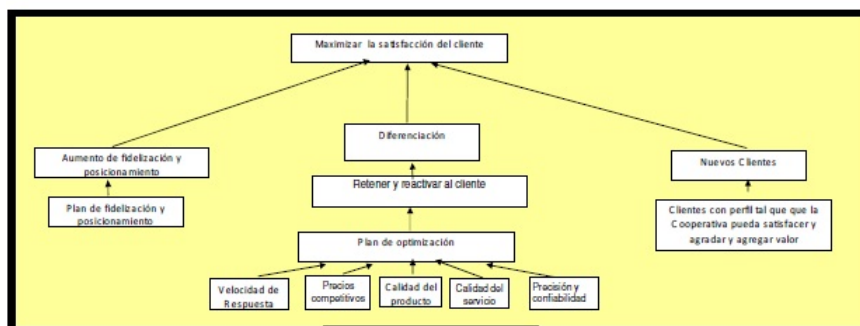


Figura 2. Perspectiva de clientes

Para la Cooperativa de Ahorro y Crédito Alianza del Valle Ltda. La perspectiva de clientes se muestra en la figura (2).

El objetivo estratégico plantea maximizar la satisfacción del cliente enfocando tres aspectos básicos: aumento de fidelización y posicionamiento, diferenciación y nuevos clientes.

Respecto a la fidelización se busca reducir 50total de socios inactivos (22al cliente; también se plantea impartir capacitación a los socios microempresarios.

La segunda estrategia planteada es la diferenciación y se enfoca en satisfacer en un 70contra la rivalidad competitiva.

Respecto a la captación de nuevos clientes se plantea crear una Unidad Estratégica de Negocio, (Agencia) en la que se deberá considerar lo rentable vs el volumen de ventas.

Perspectiva de procesos internos: Hace referencia a los aspectos en que se debe destacar la organización, la naturaleza de la propuesta de valor determina el tipo de proceso interno en el que hay que enfocarse.

La correspondencia aproximada entre la propuesta de valor primaria y la perspectiva primaria del proceso interno es la siguiente:

* La mejor compra corresponde a la perspectiva de “gestión de las operaciones”.

* Las soluciones llave en mano corresponden a la perspectiva de “gestión del cliente”.

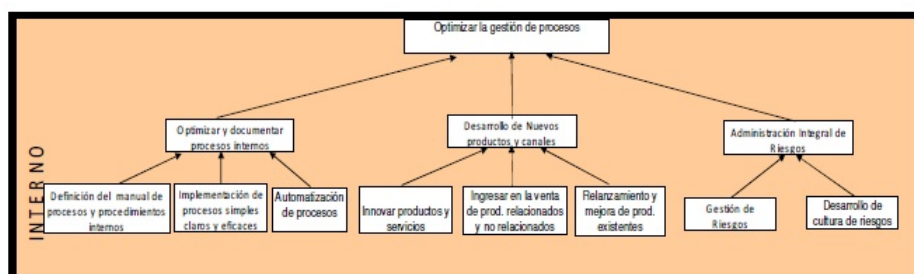


Figura 3. Perspectiva de procesos internos

* Liderazgo de producto e innovación corresponden a la perspectiva de “innovación”.

A continuación (figura (3)) se muestra esta perspectiva para la Cooperativa de Ahorro y Crédito Alianza del Valle Ltda.

En esta perspectiva, el objetivo es direccionar la gestión de procesos operando tres áreas: Optimizar y documentar procesos internos, desarrollo de nuevos productos y canales, y administración integral de riesgos.

Respecto a optimizar y documentar los procesos se plantea implementar en un 70 % la gestión de procesos planificada, esto comprende la definición de procesos claros los mismos que serán debidamente documentados y difundidos mediante el manual de procesos, culminando con la automatización de las áreas factibles.

En el desarrollo de nuevos productos y canales se aborda concretamente el lanzamiento aplicaciones vía virtual, balcón de servicios, financiamiento de vehículos, seguros cooperativos y vehiculares, Meta-ahorro Alianza Credi-Pymes, y convenios empresariales.

El relanzamiento de productos y servicios comprende agregar al producto existente ciertas características diferenciadoras que le den al socio la percepción de que la Cooperativa se está renovando. Los productos propuestos son: mayor cobertura de la red RTC, cajeros automáticos, tarjetas de debito.

Respecto al manejo de riesgos se plantea implementar en un 50 % la gestión de riesgos y fomentar una cultura de riesgos.

Perspectiva de innovación y aprendizaje: Aborda la siguiente interrogante “¿Se puede continuar mejorando y creando valor?”. Dada la vertiginosa dinámica competitiva exige las organizaciones hacen

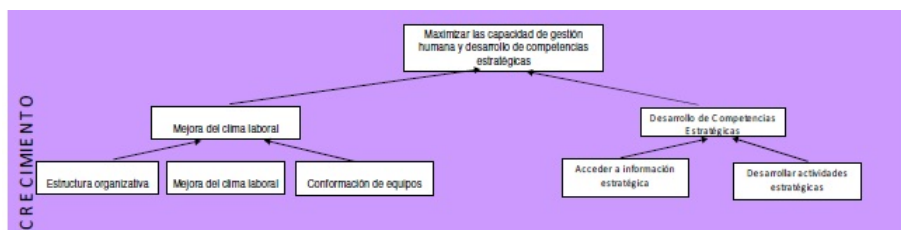


Figura 4. Perspectiva de innovación y aprendizaje

mejoras continuas tanto en productos, como en procesos existentes, previa la identificación de parámetros que considere relevantes.

“Los objetivos de la perspectiva de crecimiento y aprendizaje son los inductores necesarios para conseguir los resultados en las tres primeras perspectivas pues en estas se identifican los puntos en los que la organización ha de ser excelente”

En la Cooperativa de Ahorro y Crédito Alianza del Valle Ltda se identifican los siguientes aspectos (mirar la figura (4)):

Maximizar la capacidad de la gestión humana y desarrollo de competencias estratégicas permite crear la infraestructura para alcanzar los objetivos de las otras tres perspectivas.

Se plantea incrementar en un 50 % el nivel de identificación personal-organizacional a través de una reestructuración que permita reubicar los recursos humanos existentes.

Se prevee motivar al personal alineando los objetivos personales con los institucionales para implantar posteriormente políticas de retribución.

Se plantea un incremento del 80 % habilidades empleadas, lo que fomentará un crecimiento institucional considerable a través de la interacción entre las áreas involucradas.

Perspectiva Financiera

Los objetivos financieros son considerados como el resultado de las acciones que se hayan desarrollado en la organización con anterioridad. De esta manera con el cuadro de mando se plantea que la situación financiera de la Cooperativa no es más que el efecto que se obtiene de las medidas tomadas en las perspectivas anteriores. Los objetivos financieros servirán de enfoque para el resto de los objetivos en las siguientes perspectivas y comenzando por los objetivos financieros a largo plazo se desarrollarán una serie de acciones a realizar en los clientes, procesos y aprendizaje.

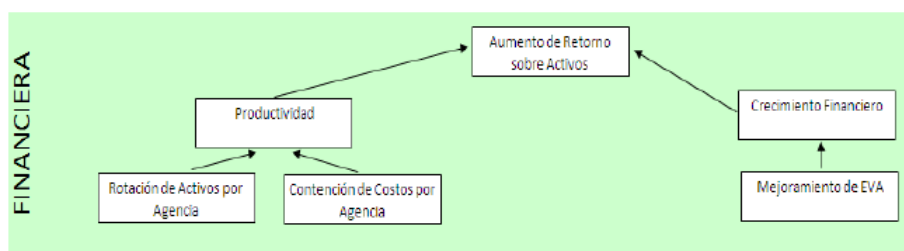


Figura 5. Perspectiva Financiera

Se presentan en la figura (5) el detalle de las estrategias, actividades y áreas involucradas en el desarrollo de esta perspectiva

Tomando en cuenta estos aspectos se plantea como objetivo estratégico el aumento de retorno sobre activos y pasivos (colocaciones y captaciones) a través de un incremento de rotación de recursos por cada agencia; además se plantea un plan de reducción de costos y mejoramiento del Valor económico agregado (EVA).

En el BSC de la perspectiva Financiera se presentan también los costos y beneficios de implementación del BSC en las áreas tratadas en el capítulo anterior.

Se estima que se obtendrá un crecimiento de 10% sobre el total de los ingresos y adicionalmente una reducción del 0,2% gastos operativos; Por el lanzamiento de nuevos productos se estima un incremento del 15% en los ingresos por servicios.

4. CONCLUSIONES

* Las matrices de evaluación permiten analizar y presentar los resultados de manera simplificada, minimizando la subjetividad de criterios.

* Los lineamientos del Balanced Scorecard (BSC), guían y ordenan el proceso de análisis y evaluación integral describiendo en detalle el desempeño e incidencia de las áreas estratégicas.

* Las resoluciones emitidas por la Superintendencia de Bancos y Seguros relacionadas con modificaciones en las cuentas contables manejadas, dificultan tener un histórico referencial de las mismas.

* Las operaciones de la Cooperativa de Ahorro y Crédito Alianza del Valle Ltda, tienen un alto grado de dependencia del sistema político-económico vigente.

* La centralización de las funciones a los jefes de áreas y la carencia del soporte brindado por subjefaturas, generan una tendencia reactiva más que proactiva.

* No se realiza una evaluación sobre el aporte y gestión del consejo directivo y de los comités de apoyo.

* La estructura organizacional actual subordina en gran magnitud las decisiones gerenciales y departamentales.

* El área de procesos carece de un cronograma puntual de implementación de procesos, generando ambigüedad en las actividades y funciones desarrolladas.

REFERENCIAS

- [1] Bowman Cliff, *La Esencia de la Administración Estratégica*, Prentice- Hall Hispanoamericana S.A., México. , (1996).
- [2] David, Fred R., *Conceptos de Administración estratégica*, Pearson/ Prentice Hall, México, (2008).
- [3] Horváth, Partners, *Dominar el Cuadro de Mando Integral*, Gestión 2000, Barcelona (2003).
- [4] Kaplan R., Norton D., *Cuadro de Mando Integral*, Gestión 2000, Barcelona, (2000).
- [5] Mojica Sastoque Francisco, *Técnicas para visualizar el futuro*, Legis, Colombia, (1991).
- [6] Mintzberg Henry, Brian James y Voyer John, *El Proceso Estratégico*, Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, (1997).
- [7] Quinn J.B., *Cambios de la Estrategia. Procesos Estratégicos*, Quinn Ed., Prentice Hall, (1988).
- [8] Stanton, William, *Fundamentos de Mercadotecnia*, Editorial McGraw- Hill, décima Edición, México, (1996).

CINTYA LORENA SÁNCHEZ GAVI

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL, FACULTAD DE CIENCIAS, CARRERA DE INGENIERÍA EN CIENCIAS ECONÓMICAS Y FINANCIERAS, LADRÓN DE GUEVARA E11-253, APARTADO 17-01-2759, QUITO, ECUADOR

E-mail address: clsanchezg1@hotmail.com

**“EPPUR SI MUOVE”:
GALILEO ENTRE CIENCIA Y ARTE**

MARCO CALAHORRANO
PATRIZIA DI PATRE

A Galileo¹ empezaron a objetarle que el nuevo modelo astronómico suponía algo inmenso, una vastedad inaudita y de imposible comprensión. Pero él replicó: “¿Y será lógico limitar las infinitas posibilidades divinas a la estrechez de nuestro entendimiento inmediato?”. Gigantesco es en efecto el libro del mundo, lleno de toda la verdad posible, de alcances insospechados e ingresos sin fin; por eso no coincide con la Sagrada Escritura. Allí el espíritu de Dios escribe para los humanos en su propio lenguaje: lo que compone es un opúsculo divulgativo. El otro en cambio hay que descifrarlo, porque Dios se vuelca enteramente y, podría decirse, con pasión en él. El cosmos natural está repleto del espíritu de Dios, misterioso y matemático: sus caracteres son “figuras geométricas, triángulos, círculos y cuadrados, cuyas propiedades es necesario conocer si se quiere descifrar su naturaleza. De lo contrario, nadie acertará a comprender ni una sola palabra del código divino, tan fascinante en su hermetismo”.

Tenemos aquí, fuertemente delineados, dos pilares del pensamiento galileano: el lenguaje y la transcripción. La comprensión plena de estas directrices, que confío al desarrollo de esta charla y a la paciencia de ustedes, nos lleva de pronto a un mundo modernamente concebido, al corazón de sus conquistas metodológicas. ¿Por qué?

2000 *Mathematics Subject Classification*. 01A20, 01A45, 01A70, 01A99.

Key words and phrases. Galileo, Aristóteles, Copérnico, Ptolomeo.

©2009 Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias.

Sometido: Octubre 30, 2009. Publicado: diciembre 30, 2009.

¹Conferencia dictada por M. Calahorrano en la Pontificia Universidad Católica del Ecuador, con ocasión de la IX Semana de Lengua y Cultura Italianas en el mundo, octubre de 2009. La doble autoría se debe a la utilización de materiales comunes.

Todo depende del planteamiento adoptado. Las proposiciones galileanas nos muestran con crudeza la entera extensión del sacrificio científico, con sus penurias y abandonos, con una decidida renuncia a la inmediatez sensorial. Tomemos cualquier fenómeno natural, de esos que nos llenan los ojos y el alma, y satisfacen por consiguiente nuestra capacidad receptiva. Su conocimiento científico equivale a un despojo: se trata de sustituir la corteza perceptiva, sensible y fina, por un núcleo de pura abstracción, y reducir la variedad de lo real a lo invariable de relaciones numéricas. La idea misma de cantidad -una de las grandes conquistas de Galileo- es algo definitivamente brutal, pero al mismo tiempo muy eficaz; una consideración de tipo cuantitativo puede reducirlo todo a la dimensión objetiva de los fenómenos, mas lo coloca también al alcance perfecto de nuestra mente geométrica.

Dicho en otra forma: si logramos entender el cosmos es solo porque entramos en consonancia con él; el principio básico del conocimiento reside en las relaciones aritméticas con que el arquitecto universal impulsa nuestros comportamientos y los del mundo. Someterse a la constancia de las leyes universales es por tanto señal de sabiduría productiva; la aspiración a un papel directivo conduce solo, por el contrario, a una ilusoria ignorancia.

Un principio bastante desconsolador para los contemporáneos de Galileo, que no lograban penetrar su esencia religiosa. Resulta casi paradójico, pensaban: gracias a una ordenación previa, divinamente concertada, tanto el acto cognoscitivo como el objeto de observación entran en una relación de pura analogía, se comprenden por la afinidad de sus operaciones elementales. Pero eso es vergonzoso, no es así como deben producirse las conquistas de la humanidad pensante.

Desde el punto de vista psicológico, ellos tenían razón: el intelecto es ávido y quiere apropiarse de los fenómenos, reducirlos a su sensibilidad, hacer que lo contenten, consuelen y alaben; desearía que la verdad se adaptase a su capacidad de razonamiento, llenándolo así de una grata certidumbre. Galileo le enseña a obedecer al mundo; en vez de constreñir la razón, prefiere ensanchar el pensamiento. Y descubre lo que la Biblia no se cuida de enseñar...

Descubre en primer lugar que el equilibrio aristotélico no coincide con el de Dios. En el anterior universo todos los movimientos tendían a equilibrarse, en un juego elegante de impulsos contrarrestados. Las mismas esferas cristalinas, tan fijas como diáfanos, se encargaban de

limitar los excesos mediante la sana acción de un impedimento físico. Con la Tierra en el centro ideal y el resto también bajo control, nada soñaría siquiera en desbordarse. Galileo introduce una decidida tendencia a romper los límites. Todo se proyecta hacia fuera en su modelo cosmológico, con una gimnasia incontrolable e intrínseca. Es como si los cuerpos se catapultaran hacia el espacio infinito, no a instancias de alguna fuerza externa, sino por obra de una autonomía prevaricadora. La impresión general es la de un caos sin remedio, de una rebeldía titánica.

Y ahora pensemos en los espacios bien organizados de Platón y Aristóteles, en su higiénica simetría universal. Los cuerpos se disponen en progresión piramidal, distanciados del vértice según la medida de sus méritos y la gráfica de un escalafón biológico. Conforme a la lógica decretada por la astronomía, también el cuerpo humano tenía su canon de proporciones ideales; el equilibrio perfecto de los humores garantizaba una salud que trascendía lo físico; y desde su posición elevada la cabeza, gobernándolo todo, constituía la atracción única de un microcosmo maravilloso.

Con Galileo esta lindura se viene abajo, y uno no pisa ya terreno firme. Asistimos a un movimiento perpetuo y, sobre todo, no jerárquico; en lugar de bandas finamente orquestadas, este teatro acoge un sinfín de gentes que, tomando la batuta, se improvisan directores. Todo un espacio lleno de innumerables direcciones, líneas hacia afuera, excentricidades sin rumbo claro, periferias sin centro. Y lo más grave: ¿para qué?

Aristóteles explicaba el movimiento como un “tender hacia algo”. Teológicamente, eso supone el dirigirse, por un impulso de atracción irresistible, hacia alguna entidad superior; cuando ya no quede nada por desear, todo será quietud y paz, inmovilidad y estatismo. Se acabaron las carreras. Con razón hablaba Dante del “amor che muove il sole e l’altre stelle”: lindo verso, recordado por Ratzinger hace muy poco: “le muove”, o sea, las dirige, atrayéndolas a sí como un imán. Con arreglo a este principio, la Tierra tenía derecho a una atracción relativamente alta: movida por el amor, debe mover al Sol. La gran culpa de Galileo, hablando en términos escolásticos, consistió en haber roto el sistema en cuestión predicando un movimiento autónomo, un impulso motor que se originaría en todo cuerpo por igual. ¿Todos los cuerpos borrachos, tambaleándose perpetuamente en un vértigo sin causa? Esta evidente falta de reglas es justo la antítesis del orden predicado por Aristóteles, asumido como la esencia del gobierno divino, y hasta supuestamente

copiado por toda criatura en sus más ínfimos detalles.

Es un orden, por lo demás, muy artístico. Del equilibrio descrito nacía la noción de una estética con puntos fijos, llana y gratamente universal. Ahora en cambio empieza a perfilarse algo que llegará a perfecta maduración solo en tiempos modernos, con la revolución einsteniana de la relatividad. Por primera vez se asiste a la intención clara de romper esquemas; domina una voluntad que podría ser interpretada como el caos de los sentidos, o la apreciación de cualquier desorden sensorial como estético. La principal objeción movida a los nuevos sistemas consistía en efecto en su falta de regulación artística, o de una inversión en los parámetros que la definen. Asumir como ideal de suprema belleza -cual se conviene a un orden establecido por Dios- la mayor confusión posible, la más grande falta de equilibrio, la peor fealdad imaginable, significa no solo contrariar ese espíritu renacentista que se expresa en el orden maniático de la perspectiva: significa oponerle la quema de todos los cánones, incluyendo al que representaba la encarnación y como la apoteosis del viejo mundo, fijo en la imagen bien proporcionada de un Policeto con aspiraciones geográficas.

Además de artístico, el orden ptolemaico es capaz de acunar al hombre, acariciando una voluntad siempre dominadora, encauzando en la perfección aspiraciones de tipo religioso: es sorprendente que Galileo lo rechace. Lo repudia en nombre de la experiencia, de la observación experimental. Otro gran concepto de la ciencia moderna, pero también aspiración eterna, no se olvide, del espíritu humano. Propia inclusive de los griegos, de Aristóteles, que no desdeñaba los experimentos. El principio de búsqueda experimental es exquisitamente aristotélico, y Galileo acabará oponiéndolo a los propios seguidores de Aristóteles. ¿Y por qué fallaba entonces? Porque no disponía del telescopio...

Sabias palabras de Brecht, que interpreta con genialidad la vida y el temperamento de Galileo. Sabias también las palabras de éste al describir un “mundo de papel”, de vanas autoridades establecidas por el hombre, que en vez de indagar se limita a charlar, peor, a repetir vocablos. El aludido mundo de papel no es sino el dominio dialogístico de los hombres-loros. También la Sagrada Escritura acude ocasionalmente a su mundo, cuando quiere hacerse comprender sin alardear: y usa parábolas. “La Escritura”, le confía Galileo a una gran duquesa, “tiene que acomodarse al entendimiento común”. Entonces baja al nivel de un periodismo mal entendido, y llega al punto de montar un

espectáculo, de ¡mandarle al sol no moverse de su sitio! Falsea las palabras, si estas no deben traducirse en actos. Pero cuando va en serio, cuando, en vez de predicar, despliega todo su ser, entonces “es inexorable e inmutable; no se preocupa vanamente de si su secreta razón y sus modos de operación excedan o no la capacidad de comprensión de los hombres. Jamás viola sus propias leyes. Por tanto los efectos naturales que la experiencia nos pone ante los ojos, o los que inferimos por demostración adecuada, en modo alguno pueden revocarse, para ajustarlos a pasajes de la Escritura”. Esta deforma por necesidad; a la otra, en cambio, le es imposible desviarse.

Magnífico imperio de la razón demostrativa, de una razón que gobierna al mismo Dios, por el hecho de ser gobernada por Él; e irrepetible caricatura de la estupidez autorizada... Rogelio Bacon, este medieval precursor de la ciencia moderna, fue el primero en decir que el vulgo se distingue de los sabios por acogerse a la opinión de la mayoría. Así que mientras el sabio interroga las leyes de Dios, el ignorante interroga a los demás...

“El mismo Dios”, continúa Galileo sobre el tema, “que nos dio el intelecto, los sentidos etc., no quiere que prescindamos de ellos en las cosas que podemos comprender por nosotros mismos. Y por consiguiente no debemos suprimir su testimonio cuando choca con alguna declaración de la Escritura Sagrada ¡Si ella no menciona siquiera el nombre de los planetas! Eso quiere decir que no fue en absoluto su intención la de enseñar astronomía a la gente”.

Muy divertido ante la idea de echar mano a un identikit bíblico, cuando se puede disponer del retratado en persona, Galileo prorrumpe en exclamaciones vivaces, gritos de indignación y, al final, súplicas animadas por un sentimiento de férvida, elocuente desesperación. “¿Quién puede poner límites a la inteligencia del hombre?”, clama con el coraje de la verdad intimidada, ofendida. “¿Quién se atreverá a asegurar que conoce ya todo lo que en el universo es cognoscible?”.

Esa búsqueda copernicana de la verdad, que Sócrates emparejaba al sentimiento de la propia ignorancia, no era ajena al espíritu de esos tiempos. Baste considerar las pinturas de los holandeses, de Vermeer. En una de ellas un geógrafo, compás en la mano, escruta ávidamente los mapas en búsqueda de una inspiración que tarda en llegar. Lo mira todo, observa, hace acopio de datos que se convertirán en hipótesis, o sea

en cuadros mentales sujetos a análisis. Esta figura ficticia está interpretando emblemáticamente el método empleado por Galileo. Representa en su actuación la necesidad, como dice Ferrater Mora, de “superar la apariencia sensible con un método a la vez inductivo y deductivo, compositivo y resolutivo. El primero reduce a una forma legal (es decir, a formulaciones matemáticas) los diversos hechos observados; el segundo deduce de la ley general los mismos hechos contenidos en ella. Ambos métodos se complementan”.

Y ¿por qué superar la realidad sensible? Porque no es susceptible de una interpretación objetiva, de una exactitud matemática. De ahí la insistencia galileana, precursora de la moderna, sobre el carácter inferior -léase inutilizable- de las cualidades sensibles o secundarias frente a la objetividad de las relaciones matemáticas. En este sentido hay que tomar la exigencia galileana de la experimentación, su sentido profundo de una observación empírica. La importancia del método no consiste en la recopilación de datos, sino en su ordenación por obra de las razones matemáticas, de las proporciones que los envuelven confiriéndoles un aspecto legible, eso es, dimensiones mensurables.

Volvemos a lo de antes, a la pura exactitud numeral, el despojo de todo lo rico e bueno, de los colores y olores, de la infinita variedad que compone el mundo. Pero también la música se despoja de todo lo que no sean sonidos, y la poesía no podrá nunca conversar en números. Tampoco Galileo que, dicho sea de paso, no despreciaba en modo alguno los gustos y belleza de la vida, pretendía operar una reducción de lo real: pero una cosa es estudiarlo, y otra muy distinta cantarlo en versos. La Biblia lo describe; los poetas pueden ensalzarlo; el científico lo descuartiza. No le quita humanidad: le confiere la cualidad divina del milagro en acto. Descubre su verdadera grandeza al develar sus partes, y magnifica el misterio en cuanto es capaz de resolverlo.

La grandeza de Galileo no reside en sus, por importantes que sean, descubrimientos científicos: consiste en la novedad del método, y sobre todo en la teorización de esta novedad. Nótese que todos los puntos de la filosofía galileana: eso es, el sentido de la cantidad, el privilegiar una forma objetiva, la misma excentricidad de la Tierra, han sido superados en la época actual. Esto es muy propio de la ciencia, que en cuanto progresiva y antiestática engulle rápidamente sus productos. El carácter clásico de los productos literarios y artísticos deriva, paradójicamente, de cualidades opuestas al progreso. Lo que crece en un sentido acumulativo deja progresivamente atrás sus mejores componentes; lo que

construye paralelamente, como es el caso de la literatura o las artes, alinea sin cesar estos productos, los valora a través de los tiempos.

El tiempo ha valorado en sumo grado la actitud galileana; ha superado sus productos históricos. Veamos de cerca su concepción de la cantidad pura, la medición exacta de los fenómenos: hoy se impone más bien -confíen en mí- un análisis de tipo cualitativo; y no solo en ramas como la lógica, donde permanecen insolutos graves problemas de legitimación ontológica, de interna subsistencia. Sin mencionar la matemática probabilista de Heisenberg, donde un mismo objeto puede, en rigor, ocupar simultáneamente dos lugares distintos, y un individuo puede encontrarse al mismo tiempo sentado, o de pie.

En cuanto al movimiento novedosamente atribuido a la Tierra, los invito a escuchar el siguiente pasaje literario, extraído de Thomas Mann.

“- [...] la degradación comenzó por la nueva astronomía, la cual ha hecho del centro del universo, del escenario ilustre en el que Dios y Satán se disputaron a las criaturas, un pequeño planeta cualquiera y que provisionalmente ha puesto fin a la grandiosa situación cósmica del hombre, sobre la cual se fundaba la astrología.

- ¿Provisionalmente?

- Sin duda. Para algunos cientos de años. Si los signos no son engañosos, la escolástica será también rehabilitada, el proceso está en camino. Copérnico será derrotado por Ptolomeo. La tesis heliocentrista encuentra cada vez mayor resistencia en el espíritu. Es probable que la ciencia se vea obligada por la filosofía a devolver a la Tierra toda la majestad que le atribuía el dogma religioso.

- ¿Cómo? ¿Qué dice? ¿Resistencia del espíritu, obligada por la filosofía? ¿Qué clase de voluntarismo expresan sus palabras? ¿Y la ciencia incondicional? ¿Y el conocimiento puro? ¡La verdad, señor, que se halla tan íntimamente ligada con la libertad y sus mártires, que usted quiere convertir en insultadores de la Tierra, la verdad permanecerá como el eterno ornamento de este astro!”.

Quienes disputan aquí son, respectivamente, el representante de un positivismo social y un jesuita partidario de leyes medievales. Su creador

los hace hablar confusamente, invirtiendo posiciones y mezclando argumentos, mas con indudable sutileza dialéctica. Veamos qué sostiene el representante de la nueva “escolástica”: evidentemente, que la Tierra fue desplazada solo en forma provisional del centro del universo. El otro, naturalmente, en su calidad de filósofo moderno y pensador con mentalidad científica, se opone con indignación a teorías tan retrógradas y en apariencia absurdas: protesta en nombre de la “nueva ciencia”. Pero ¿qué es lo que decreta la nueva ciencia einsteniana? Partiendo de su concepción relativista, ¿será lícito asumir un centro absoluto, o podrá fijarse el punto céntrico que nos parezca conveniente, dependiendo del marco asumido? ¿Podrá hablarse de verdad, o deberá considerársela como algo puramente convencional? ¿Cuál será el planeta y cuál la estrella “fija”, en un mundo donde no hay una sola posición que no se defina a base de otras, y donde los propios términos de “reposo” o “movimiento” son únicamente susceptibles de una definición recíproca?

El espacio relativista de Einstein vuelve, a fin de cuentas, “normal” y sostenible la posición del extraño y anacrónico personaje creado por Mann.

¿Qué queda entonces de la matemática galileana? Es la misma fascinación que emana de sus sistemas planetarios, la pérdida de una ilusoria estabilidad -con el relativo sentido de seguridad primordial- y, en un balance suficientemente compensador, la aspiración a todo lo inimaginable, la confianza plena en la inteligencia, el anhelo constante a una conquista progresiva.

MARCO CALAHORRANO

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL, FACULTAD DE CIENCIAS, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, LADRÓN DE GUEVARA E11-253, APARTADO 17-01-2759, QUITO, ECUADOR

E-mail address: marco.calahorrano@epn.edu.ec

PATRIZIA DI PATRE

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR, FACULTAD DE COMUNICACIÓN, LINGÜÍSTICA Y LITERATURA

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL, DEPARTAMENTO DE CIENCIAS SOCIALES, LADRÓN DE GUEVARA E11-253, APARTADO 17-01-2759, QUITO, ECUADOR

E-mail address: pdipatre@puce.edu.ec

INTERACCIÓN DE FOTONES CON UN GAS DE ELECTRONES CON IMPUREZAS

JORGE FRAGA F.
ERICSON LÓPEZ I.

RESUMEN. Se realiza una investigación teórica que estudia los fenómenos de naturaleza cuántica de la interacción entre radiación electromagnética y un plasma con impurezas. Para esto se calcula y analiza el coeficiente de atenuación de radiación del plasma con impurezas. Se propone un modelo para el plasma, que permite aplicar la teoría de sistemas de muchas partículas a la resolución del problema. El modelo consiste en un gas de electrones en el ensamble gran-canónico, con impurezas de concentración determinada y distribución aleatoria. Se demuestra que la concentración de las impurezas no influyen en la sección eficaz de la dispersión de Compton. A partir de la función de Green del sistema se calcula la concentración de electrones en el sistema en la primera aproximación de la auto-energía. Se considera que las impurezas interactúan con los electrones mediante un potencial de Debye y se analiza la variación en la concentración de electrones de varios plasmas obtenidos de la literatura. Con este resultado se estudian los efectos cuánticos en el coeficiente de atenuación y el camino libre medio de un plasma con impurezas determinado.

1. INTRODUCCIÓN

El plasma es un estado de la materia, donde las partículas se encuentran totalmente ionizadas. Existen algunos sistemas físicos en la naturaleza donde se puede encontrar materia en el estado de plasma con partículas neutras o impurezas [1]. Debido a que el plasma es un estado donde, en general, los electrones e iones tienen temperaturas no relativistas, los modelos que se proponen en la literatura no toman

Key words and phrases. Coeficiente de atenuación de la radiación, plasma con impurezas, teoría cuántica de sistemas de muchas partículas.

©2009 Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias.

Sometido: Febrero 27, 2009. Aceptado: diciembre 30, 2009.

en cuenta los fenómenos de origen cuántico de manera formal [1, 2]. Por otro lado, en investigaciones asociadas con plasmas astrofísicos, el único parámetro con el que podemos estudiar los fenómenos físicos externos, es la radiación electromagnética emitida que está asociada a los procesos físicos de dispersión, absorción y emisión de la radiación en la materia [3, 4].

Considerando esto en el presente trabajo realizamos una investigación teórica que estudia los fenómenos de naturaleza cuántica de la interacción entre radiación electromagnética y un plasma con impurezas. En particular, investigamos el comportamiento del coeficiente de atenuación de la radiación de este plasma. El problema planteado requiere estudiar el comportamiento cuántico de un sistema de muchas partículas, por tanto ha sido necesario recurrir a la *teoría cuántica de sistemas de muchas partículas*. Esta teoría consiste en una combinación de diversos métodos y conceptos de la Física Estadística y Teoría Cuántica de Campos [5, 6, 7, 8].

Para poder estudiar este problema es necesario establecer un modelo que nos permita simplificar la gran cantidad de variables que existen en un proceso físico de este tipo. Primeramente, no tomaremos en cuenta la presencia de los iones positivos. Este procedimiento es usual y una buena aproximación para la descripción de los plasmas en general, debido a que la radiación electromagnética interactúa principalmente con los electrones del plasma [1, 2]. El resultado es un gas de electrones con impurezas. A continuación analizamos el comportamiento del coeficiente de atenuación de radiación del sistema, que viene de la ecuación de atenuación de la radiación de la materia,

$$I_\nu(x) = I_{\nu 0} e^{-\alpha x}. \quad (1)$$

El coeficiente α de un sistema con varios componentes se puede determinar mediante la suma de los coeficientes de atenuación de cada componente, es decir, $\alpha = \sum_i \alpha_i = \sum_i n_i \sigma_i$, donde n_i es la concentración del i -ésimo componente que contenga el sistema y σ_i es la sección eficaz correspondiente. Para el sistema que estamos analizando tenemos entonces que el coeficiente de atenuación total α_T sería la suma de los coeficientes de atenuación correspondientes al gas de electrones y a las impurezas, es decir

$$\alpha_T = \alpha_e + \alpha_{\text{imp}}. \quad (2)$$

Aquí consideramos que las secciones eficaces de los átomos de la impureza y de los electrones no se ven afectadas. En el caso de las impurezas las consideramos compuestas por materia común, lo que significa que sus átomos y moléculas van a interactuar con los fotones incidentes de todas las formas conocidas, dependiendo de la energía $\hbar\omega$

de cada fotón. Por tanto el coeficiente de atenuación de las impurezas puede expresarse como

$$\alpha_{\text{imp}} = n_{\text{imp}}(\sigma_R + \sigma_{ph} + \sigma_C + \sigma_{pp(\text{nucl})} + \sigma_{pp(e)})_{\text{imp}}, \quad (3)$$

donde n_{imp} es la concentración de las impurezas, σ_R la sección eficaz de Rayleigh, σ_{ph} es la sección eficaz del efecto fotoeléctrico, σ_C es la sección eficaz de Compton, $\sigma_{pp(\text{nucl})}$ es la sección eficaz de la producción de pares en la presencia del campo de Coulomb de un núcleo y $\sigma_{pp(e)}$ es la sección eficaz de la producción de pares en la presencia del campo de Coulomb de un núcleo.

En el caso del coeficiente de atenuación del gas de electrones, sólo las dispersiones por el efecto Compton contribuyen a la sección eficaz, es decir

$$\alpha_e = n_e \sigma_C(\hbar\omega). \quad (4)$$

Aquí necesitamos analizar la concentración de electrones n_e , ya que a nivel cuántico, la presencia de impurezas en un gas de electrones produce cambios en la función de Green del sistema, la cual es proporcional a la concentración de electrones. Además, es de interés analizar si la sección eficaz de la dispersión de Compton experimenta alguna modificación al introducir las impurezas en el gas de electrones. Más adelante analizaremos en detalle cada uno de estos posibles efectos.

2. SECCIÓN EFICAZ DE LA DISPERSIÓN DE COMPTON

En esta sección analizamos el comportamiento de la sección eficaz de la dispersión de Compton en un gas de electrones con impurezas. Para esto seguiremos un procedimiento análogo al cálculo de la sección eficaz de dispersión de Compton para un electron libre expuesto en [10]. La diferencia radicaré en que el electrón que vamos a analizar está relacionado con un propagador S_{FG} , en el cual se incluyen los efectos de un gas de electrones. Este propagador se expresa de la siguiente forma

$$S_{\text{FG}}(p) = \frac{\not{p} + m_0}{p^2 - m_0^2 + i0} + 2\pi i(\not{p} + m_0)\delta(p^2 - m_0) \left[\frac{\Theta(p_0)}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu)} + 1} + \frac{\Theta(-p_0)}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{p}} + \mu)} + 1} \right] \quad (5)$$

donde $\not{p} = \gamma_\mu p^\mu$ es el cuadri-momento del electrón (γ_μ son la matrices gama), $p_0 = \epsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2}$ es la energía relativista del electrón¹. El término entre corchetes de (5), corresponde a las contribuciones del gas de electrones y del gas de positrones respectivamente. Observamos que tienen la forma de distribución de Fermi-Dirac, por lo cual podemos

¹En esta sección se utilizará las unidades naturales, es decir $\hbar = c = 1$.

definir a este término como la densidad de estados del gas de electrones $\langle n(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \rangle$ y positrones $\langle n(\epsilon_{\mathbf{k}} + \mu) \rangle$. Considerando que la función de Green del sistema es proporcional a la densidad de estados, entonces podemos asociar de manera general este término a la función de Green de promedio de desorden del sistema. A continuación calculamos la sección eficaz diferencial de la dispersión de un fotón por un electrón en el gas. Para esto consideramos la dispersión entre un electrón de cuadri-momento y polarización (p_i, s_i) y un fotón en la medida (gauge) transversal de cuadri-momento y polarización (k, ε) . Definimos la matriz de transición de la dispersión S_{fi} mediante las reglas de Feynman como

$$S_{fi} = \frac{e^2}{V^2} \sqrt{\frac{m_0^2}{E_i E_f}} \sqrt{\frac{(4\pi)^2}{2\omega 2\omega'}} (2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - p_i - k) \times \\ \times \bar{u}(p_f, s_f) [(i \not{\varepsilon}') i S_{\text{FG}}(p_i + k) (i \not{\varepsilon}) + (i \not{\varepsilon}) i S_{\text{FG}}(p_i - k') (i \not{\varepsilon}')] \\ u(p_i, s_i), \quad (6)$$

donde E_i y E_f son las energías de los electrones inicial y final respectivamente, ω y ω' son las energías del fotón entrante y saliente respectivamente, la función delta de Dirac $\delta^4(p_f + k' - p_i - k)$ garantiza la conservación del momento y la energía, $u(p_i, s_i)$ y $u(p_f, s_f)$ son los espinores de los electrones inicial y final respectivamente, $\not{\varepsilon}$ y $\not{\varepsilon}'$ son los cuadri-vectores de polarización del fotón entrante y saliente respectivamente. Finalmente, S_{FG} es el propagador del electrón en el gas definido en (5). El cálculo de la sección eficaz se realizara en el sistema de laboratorio, donde el electrón estará inicialmente en reposo, es decir, $p_i = (m_0, \mathbf{0})$. Para electrones no polarizados se debe promediar sobre los espines iniciales y sumarlos sobre los espines finales. Utilizado la técnica usual mencionada en [10] para eliminar los espinores de los electrones se tiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} = \alpha^2 \frac{\omega'^2}{\omega^2} |\bar{u}(p_f, s_f) [\not{\varepsilon}' S_{\text{FG}}(p_i + k) \not{\varepsilon} + \not{\varepsilon} S_{\text{FG}}(p_i - k') \not{\varepsilon}'] u(p_i, s_i)|^2 \quad (7)$$

$$= \alpha^2 \frac{\omega'^2}{\omega^2} \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \frac{\not{p}_f + m_0}{2m_0} \Gamma \frac{\not{p}_i + m_0}{2m_0} \bar{\Gamma} \right\}, \quad (8)$$

donde α es la constante de acoplamiento y el operador Γ está definido por $\Gamma = \Gamma_{\text{F}} + i\Gamma_{\text{G}}$. Reemplazando esta ecuación en (8) podemos expresar los términos de esta ecuación de la siguiente forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} = \left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}} \right)_{\text{F}} + \left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}} \right)_{\text{G}} + i \left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}} \right)_{\text{FG}}, \quad (9)$$

donde observamos que la sección eficaz diferencial se ha dividido en tres contribuciones, de las cuales $(d\bar{\sigma}/d\Omega_{k'})_F$ corresponde al electrón libre y $(d\bar{\sigma}/d\Omega_{k'})_G$ al gas de electrones. $i(d\bar{\sigma}/d\Omega_{k'})_{FG}$ es una contribución combinada, pero al ser imaginaria, no se la tomará en cuenta. El cálculo de la primera contribución es conocido y conduce a la sección eficaz diferencial de Klein-Nishina. Calculamos la contribución del gas de electrones partiendo de (8) y por conveniencia, definimos la función

$$h(\epsilon) = [\Theta(k_0)\langle n(\epsilon - \mu) \rangle + \Theta(-k_0)\langle n(\epsilon + \mu) \rangle]^2 \quad (10)$$

para simplificar la notación. Finalmente, podemos evaluar la sección eficaz diferencial, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}} \right)_G &= \alpha^2 \frac{\omega'^2}{\omega^2} \frac{\pi^2}{m_0^3} \left[\omega \delta^2(\omega) [\omega' m_0 + 2(k \cdot \epsilon')^2] h(\epsilon_{\mathbf{p}_i + \mathbf{k}}) + \right. \\ &\quad \left. + \omega' \delta^2(\omega') [\omega m_0 - 2(k' \cdot \epsilon)^2] h(\epsilon_{\mathbf{p}_i - \mathbf{k}'} - \right. \\ &\quad \left. - 2\delta(\omega) \delta(\omega') (m_0 \omega \omega' [2(\epsilon' \cdot \epsilon)^2 - 1] - \omega' (k \cdot \epsilon')^2 + \right. \\ &\quad \left. + \omega (k' \cdot \epsilon)^2) h(\epsilon_{\mathbf{p}_i + \mathbf{k}}) h(\epsilon_{\mathbf{p}_i - \mathbf{k}'} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Observamos que cada uno de los términos de esta ecuación contiene uno de los siguientes productos $\omega \delta(\omega) = \omega' \delta(\omega') = 0$ [11]. Para (11), esto implica que

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_{k'}} \right)_G = 0. \quad (12)$$

Como se ha demostrado, la contribución del gas de electrones a la sección eficaz diferencial de la dispersión de Compton es nula. Las funciones $h(\epsilon_{\mathbf{p}_i + \mathbf{k}})$ y $h(\epsilon_{\mathbf{p}_i - \mathbf{k}'})$ definidas en (14) contienen la información de la densidad de estados que es proporcional a la función de Green del sistema. Dado que estos términos se anulan, esto implica que la influencia de las impurezas ejercida mediante la densidad de estados del gas de electrones, no afecta a la sección eficaz de dispersión de Compton. Por tanto en cálculos posteriores utilizaremos la sección eficaz total de Klein-Nishina (con $x = \omega/m_0$ [10])

$$\sigma_C(x) = 2\pi r_e^2 \left[\frac{1+x}{x^3} \left(\frac{2x(1+x)}{1+2x} + \frac{1}{2x} \right) \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right], \quad (13)$$

3. CONCENTRACIÓN DE UN GAS DE ELECTRONES CON IMPUREZAS

A continuación planteamos un modelo conveniente para el sistema del gas de electrones con impurezas. Suponemos que el gas de electrones se encuentra en un ensamble macro-canónico, es decir, el sistema tiene un volumen finito V y una temperatura definida T . El número de electrones N en el sistema es variable, por lo cual tienen asociado un potencial químico μ , que representa la energía necesaria para intercambiar un electrón con el medio circundante. Las impurezas se encuentran distribuidas en el gas de electrones en forma desordenada con una concentración n_{imp} y un potencial de interacción $u(\mathbf{r})$. El hamiltoniano del gas de electrones y las impurezas estaría dado por

$$H = (T_e + V_{e-e}) + (T_{\text{imp}} + V_{\text{imp-imp}}) + V_{\text{imp-e}}, \quad (14)$$

donde T_e es la energía cinética de los electrones, T_{imp} es la energía cinética de las impurezas, V_{e-e} es la interacción entre electrones, $V_{\text{imp-imp}}$ es la interacción entre las impurezas y $V_{\text{imp-e}}$ es la interacción entre los electrones y las impurezas. Para simplificar el estudio de este sistema podemos aplicar las siguientes restricciones:

1. Dado que las impurezas en un plasma tienen un potencial apantallado, el rango de interacción es corto para distancias grandes respecto a las dimensiones de la impureza. Por tanto a bajas concentraciones de impurezas, $n_{\text{imp}} \ll n_e$ y podemos prescindir del término $V_{\text{imp-imp}}$.
2. Considerando que la temperatura de las impurezas es mucho menor que la del gas de electrones, entonces la velocidad de las impurezas es mucho menor respecto a la de los electrones, por lo cual podemos asumir que $T_{\text{imp}} = 0$, y por consiguiente que las impurezas pueden considerarse en posiciones fijas.
3. Consideramos como primera aproximación para el análisis del problema, que los electrones no interactúan entre sí. Esto se puede justificar debido a que los electrones en un plasma actúan como cuasi-partículas, es decir, no interactúan con el potencial de largo rango de Coulomb sino con un potencial apantallado de Debye [8]. Además para concentraciones relativamente bajas y temperaturas altas, las interacciones entre ellos puede ser muy pequeña.

Con estas restricciones y simplificaciones, el modelo para el plasma con impurezas viene a ser un gas de electrones no interactuantes, con impurezas de baja concentración localizadas en posiciones fijas aleatorias.

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{G}_{\mathbf{k}} \rangle_{\text{imp}} &= \left(\text{---} \leftarrow + \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \right) \times \left(\text{---} \leftarrow + \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow + \dots \right) \\
&= \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^0 + \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^0 \Sigma_{\mathbf{k}} \langle \mathcal{G}_{\mathbf{k}} \rangle_{\text{imp}}.
\end{aligned}
\tag{a}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathbf{k}} &= \text{---} \text{---} \text{---} \\
&= \text{---} \leftarrow + \text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow + \left(\text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow + \text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow \right) + \left(\text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow \text{---} \leftarrow + \dots \right) + \dots
\end{aligned}
\tag{b}$$

FIGURA 1. Representaciones diagramáticas de (a) la función de Green de promedio de desorden y (b) la expansión en serie de la auto-energía. Imágenes adaptadas de Bruus (2002).

Este sistema es descrito por el siguiente hamiltoniano

$$H = T_e + V_{\text{imp-e}} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}), \tag{15}$$

donde m es la masa del electrón y $\Delta_{\mathbf{r}}$ es el laplaciano respecto a las coordenadas del electrón. Este describe la energía cinética de los electrones y el potencial de interacción entre las impurezas y los electrones. Observamos que este hamiltoniano tiene la forma del estudiado en [9] para el gas de Fermi con impurezas. Para nuestro problema, las impurezas también se mantienen fijas, por tanto el potencial externo $V_{\text{imp-e}}$ se expresa como

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_{\text{imp}}} u(\mathbf{r} - \mathbf{P}_j), \tag{16}$$

donde la sumatoria va sobre todas las N_{imp} impurezas que se encuentran en el gas de electrones ($n_{\text{imp}} = N_{\text{imp}}/V$, V el volumen del sistema), ubicadas en las \mathbf{P}_j posiciones fijas distribuidas aleatoriamente, y $u(\mathbf{r} - \mathbf{P}_j)$ es el potencial de una impureza individual sobre cada electrón. Planteamos la ecuación de Dyson para el hamiltoniano (15) en la aproximación de promedio de desorden [9],

$$\langle \mathcal{G}_{\mathbf{k}}(i\omega_n) \rangle_{\text{imp}} = \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^0(i\omega_n) + \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^0(i\omega_n) \Sigma_{\mathbf{k}}(i\omega_n) \langle \mathcal{G}_{\mathbf{k}}(i\omega_n) \rangle_{\text{imp}}, \tag{17}$$

donde $\Sigma_{\mathbf{k}}(i\omega_n)$ es la auto-energía del sistema. Resolviendo esta ecuación integral tenemos

$$\langle \mathcal{G}_{\mathbf{k}}(i\omega_n) \rangle_{\text{imp}} = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}} - \Sigma_{\mathbf{k}}(i\omega_n)}. \tag{18}$$

En la figura 1(a) se puede observar los diagramas de Feynman asociados a la ecuación de Dyson de la función de Green y en 1(b), la expansión en serie de la auto-energía. Con la función de Green (18) podemos encontrar la densidad de estados del gas de electrones, evaluando la sumatoria sobre las frecuencias de Matsubara, es decir

$$\langle n(\epsilon_{\mathbf{k}}) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} \langle \mathcal{G}_{\mathbf{k}}(i\omega_n) \rangle_{\text{imp}}. \quad (19)$$

Con esta densidad de estados podemos inmediatamente calcular el número de electrones en el gas aplicando los métodos de la física estadística para un gas de Fermi [13]. Por tanto, la concentración de electrones en el sistema está dada por

$$n_e = \frac{N}{V} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} \langle \mathcal{G}_{\mathbf{k}}(i\omega_n) \rangle_{\text{imp}}. \quad (20)$$

Como puede verse, n_e es proporcional a la función de Green de promedio de desorden, donde está contenida toda la información del sistema, en este caso, las interacciones del gas de electrones con las impurezas. La ecuación (20) es la manera más general de calcular la concentración de electrones en el sistema.

3.1. Primera Aproximación de la Auto-Energía. A continuación calculamos la concentración de electrones n_e para la aproximación más baja de la expansión en serie de la auto-energía (figura 1(b)), para lo cual tenemos

$$\Sigma_{\mathbf{k}}^0(i\omega_n) \equiv \overset{\star}{\bullet} = n_{\text{imp}} u_0, \quad (21)$$

donde n_{imp} es la concentración de las impurezas y u_0 es la transformada de Fourier del potencial de la impureza $u_{\mathbf{q}}$ evaluado en $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Entonces para la función de Green (18) en esta aproximación tenemos

$$\langle \mathcal{G}_{\mathbf{k}}(i\omega_n) \rangle_{\text{imp}}^0 = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}} - n_{\text{imp}} u_0}. \quad (22)$$

Como se ve, la interacción de las impurezas con el gas de electrones causa un desplazamiento de los niveles de energía con el término constante $n_{\text{imp}} u_0$. Observamos además que la auto-energía no depende de las frecuencias de Matsubara $i\omega_n$ ni del momento \mathbf{k} , por lo cual no existen consecuencias dinámicas en el gas de electrones [9]. Esto nos permite incorporar este término al potencial químico contenido en $\xi_{\mathbf{k}}$, redefiniendo este término de la siguiente manera $\xi_{\mathbf{k}}^0 = \xi_{\mathbf{k}} + n_{\text{imp}} u_0$. Calculamos la densidad de estados de acuerdo a (19). Aquí se tiene una sumatoria sobre frecuencias complejas, que debe evaluarse usando

cálculo de residuos en variable compleja [14]. Evaluamos la sumatoria de acuerdo a las reglas propuestas en [9] y obtenemos la densidad de estados

$$\langle n(\epsilon_{\mathbf{k}}) \rangle^0 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}^0} = \frac{1}{e^{\beta \xi_{\mathbf{k}}^0} + 1}. \quad (23)$$

Considerando (23), calculamos la concentración de electrones en el sistema,

$$n_e = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - (\mu + n_{\text{imp}} u_0))} + 1} \quad (24)$$

Transformando la integral de momentos a una integral con respecto a las energías, luego realizado el cambio de variable $x = \beta\epsilon$ y redefinido la fugacidad como

$$z_u = e^{\beta(\mu + n_{\text{imp}} u_0)} \quad (25)$$

obtenemos la concentración de electrones en el sistema en esta aproximación de la auto-energía

$$n_e = \frac{2}{\Lambda^3} f_{3/2}(z_u). \quad (26)$$

donde hemos utilizando la longitud de onda térmica Λ y la función de Fermi $f_{3/2}(z_u)$ [15]. Como se puede observar, la concentración de electrones se expresa de la misma manera que para un gas de electrones ideal, pero con una fugacidad redefinida por (25). Considerando que el sentido físico de la fugacidad está asociado a la estabilidad del sistema, de modo que si $z \rightarrow 0$ el sistema es más estable, entonces en (25), si $n_{\text{imp}} u_0 < 0$ el sistema será más estable, y si $n_{\text{imp}} u_0 > 0$ el sistema será menos estable.

3.2. Impurezas con Potencial de Debye. A continuación vamos a calcular la concentración de electrones (26) para un potencial de impurezas determinado. Se conoce que en general las impurezas tienden a cargarse negativamente debido al apantallamiento de los electrones en su superficie [12], por lo cual estudiaremos el comportamiento del gas de electrones con impurezas que tengan un potencial de Debye dado por

$$u(r) = \frac{Z_d e^2}{r} e^{-(r-r_d)/\lambda_D}, \quad (27)$$

donde Z_d es la carga de la impureza, r_d es el radio medio de la impureza y λ_D es la longitud de Debye. Con el fin de buscar la concentración de

electrones asociada a este potencial, calculamos el término u_0 de (31), es decir

$$u_0 = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{Z_d e^2}{r} e^{-(r-r_d)/\lambda_D} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = 4\pi Z_d e^2 \lambda_D^2 e^{r_d/\lambda_D}. \quad (28)$$

Con este resultado se encuentra inmediatamente la fugacidad modificada (25) del sistema

$$z_u = \exp \{ \beta (\mu + n_{\text{imp}} (4\pi Z_d e^2 \lambda_D^2 e^{r_d/\lambda_D})) \}. \quad (29)$$

Aquí podemos observar que si las impurezas tuviesen un potencial de Coulomb, es decir $\lambda_D \rightarrow \infty$, la fugacidad (29) se hace infinita y por tanto la concentración (26) diverge. Esto refleja la importancia del apantallamiento de Debye en la impurezas para esta aproximación. Podemos calcular el potencial químico de (29) a partir de la concentración de electrones del gas ideal n_{e0} y de su temperatura T_e , usando las definiciones aproximadas mencionadas en [13], de lo cual se obtiene la siguiente expresión

$$\mu(T_e, n_{e0}) = \begin{cases} \epsilon_F(n_{e0}) \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} [k_B T_e / \epsilon_F(n_{e0})]^2 \right\} & , \text{ si } \Theta \leq 1 \\ k_B T_e \left[\ln \left(n_{e0} \frac{\Lambda^3}{2} \right) + \frac{1}{2^{3/2}} n_{e0} \frac{\Lambda^3}{2} \right] & , \text{ si } \Theta > 1. \end{cases} \quad (30)$$

Aquí se ha utilizado el criterio de la temperatura reducida $\Theta = \frac{k_B T_e}{\epsilon_F(n_{e0})}$ para determinar el comportamiento aproximado de μ . El término $\epsilon_F(n_{e0})$ es la energía de Fermi del gas de electrones. Debido a la definición exponencial de la fugacidad (29), esta puede tomar valores extremos dependiendo de la temperatura y la concentración de los electrones. Por tanto es conveniente usar los valores aproximados de $f_{3/2}(z)$ sugeridos en [13, 15]. Para nuestros cálculos numéricos utilizaremos la siguiente aproximación

$$f_{3/2}(z) = \begin{cases} z & \text{si } z < 0.01 \\ \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^{30} dx \sqrt{x} / (z^{-1} e^x + 1) & \text{si } 0.01 \leq z \leq 10^6 \\ (\ln z)^{3/2} / (3/2)! & \text{si } z > 10^6 \end{cases} \quad (31)$$

donde hemos integrado hasta el valor de $x = 30$, donde el integrando de la función $f_{3/2}(z)$ converge. Tomando en cuenta las ecuaciones (29-31), evaluamos la concentración de electrones (26), obteniendo la siguiente expresión

$$n_e = 2 \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T_e} \right)^{-3/2} f_{3/2} \left(\exp \{ \beta [\mu(T_e, n_{e0}) + n_{\text{imp}} 4\pi Z_d e^2 \lambda_D^2 e^{r_d/\lambda_D}] \} \right). \quad (32)$$

CUADRO 1. Valores aproximados de parámetros de distintos plasmas con impurezas cargadas. Se menciona como referencia los datos de plasmas solares. Datos tomados de P. K. Shukla (2002).

No.	Plasma	n_e [m^{-3}]	T_e [K]	n_{imp} [m^{-3}]	r_d [μm]	a/λ_D
	Corona Solar	10^{13}	10^6	—	—	—
	Núcleo Solar	5×10^{33}	1.7×10^7	—	—	—
1	Nubes Interestelares	$10^3 - 10^2$	12	0.1	0.2	≤ 0.3
2	Disco de Polvo Zodiacal	5×10^6	10^5	10^{-6}	2-10	5
	Cometa Halley:					
3	en la ionopausa	$10^9 - 10^{10}$	$\leq 10^3$	10^3	0.1–10	≥ 1
4	fuera de la ionopausa	$10^8 - 10^9$	$\sim 10^4$	$10^{-2} - 0.1$	0.01–10	≥ 10
	Anillos de Saturno:					
5	E	$\sim 10^7$	$10^5 - 10^6$	0.1	~ 1	0.1
6	F	$\sim 10^7$	$10^5 - 10^6$	$\leq 10^7$	1	$\leq 10^{-3}$
7	radiales	$10^5 - 10^8$	$\sim 10^4$	$\sim 10^6$	~ 1	$\leq 10^{-2}$
8	NLCs ¹	10^9	150	10^7	0.1	0.2
9	Combustión de Cohetes	10^{19}	3×10^3	10^{14}	0.1	≤ 5
10	Llamas	10^{18}	2×10^3	10^{17}	0.01	≤ 1
11	Descargas dc ²	10^{15}	$3-30 \times 10^4$	$10^9 - 10^{10}$	1 – 5 (Al)	—
12	Descargas rf ³	10^{15}	23 200	2×10^{11}	5 (SiO ₂)	—

¹Nubes Nuctilucientes Terrestres. ² $T_d = 300$, $Z_d \sim 10^5$ K para partículas de Al y $r_d = 50 - 65 \mu m$, $Z_d \sim 10^6$ K para partículas de vidrio. ³ $T_i = 350$ K, $\Gamma_c = 100 - 200$.

Como se observa, esta expresión tiene la misma forma de (26), pero gracias a las aproximaciones realizadas, esta ya puede ser utilizada para realizar cálculos numéricos de la concentración.

3.3. Análisis para Varios Plasmas con Impurezas. Observamos que la concentración de electrones (32) depende de seis parámetros distintos

$$n_e = n_e(T_e, n_{e0}, n_{imp}, Z_d, r_d, \lambda_D). \quad (33)$$

Los dos primeros, n_{e0} y T_e definen el gas de electrones y debido a que se tienen cuatro parámetros que dependen de las propiedades de las impurezas, es necesario recurrir a ejemplos experimentales para analizar el comportamiento de la concentración de electrones (32). Para esto hemos tomado datos de diferentes plasmas con impurezas de [12], los cuales se muestran en el cuadro 1. Para determinar la longitud de Debye a partir de la razón a/λ_D , recordamos que la magnitud a del cuadro

1 es es la distancia media entre impurezas determinada por

$$a(n_{\text{imp}}) = \left(\frac{4\pi}{3} n_{\text{imp}} \right)^{-1/3}. \quad (34)$$

Para los plasmas (11) y (12) en los que no se da este término, podemos encontrar la longitud de Debye considerando la constante de acoplamiento entre las impurezas

$$\Gamma_{\text{imp}} = \frac{Z_d^2 e^2 / a(n_{\text{imp}})}{k_B T_d} \exp \left\{ -\frac{a(n_{\text{imp}})}{\lambda_D} \right\}, \quad (35)$$

donde T_d es la temperatura de las impurezas, que en este caso es de 300 K, la temperatura aproximada del ambiente. Para obtener la carga de la impureza Z_d a partir de los datos dados, aplicamos la ecuación sugerida en [16] para plasmas con impurezas experimentales

$$\frac{k_B T_e}{Z_d e^2 / r_d} \approx 2 - 4, \quad (36)$$

la cual relaciona la energía cinética de los electrones con respecto a la energía potencial en la superficie de la impureza. En el cuadro 2 se muestran los cálculos de la longitud de Debye λ_D y la carga de la impureza Z_d para los diferentes plasmas del cuadro 1. Como se observa en el cuadro 2, los plasmas (1)-(8) tienen valores de longitud de Debye mucho mayores que el radio de la impureza ($\lambda_D \gg r_d$), lo cual implica que el apantallamiento de los electrones en la impureza es débil y el potencial tiende a ser de Coulomb, es decir $e^{-(r-r_d)/\lambda_D} \rightarrow 1$ en (27). Además los plasmas (1), (8), (9) y (10) presentan valores de carga de la impureza muy bajas. Esto se debe a que la fórmula (36) utilizada para estimar Z_d es válida básicamente para plasmas complejos experimentales terrestres. Sin embargo el resto de plasmas presentan cargas de impureza con valores aceptables, es decir $Z_d \gg 1$.

Con estas consideraciones obtenemos los parámetros necesarios para calcular la concentración de electrones n_e de los plasmas con impurezas del cuadro 1 a partir de la ecuación (32). Además podemos calcular la variación en la concentración de electrones $\Delta n_e = n_e - n_{e0}$ y el porcentaje que esta variación representa respecto a la concentración original n_{e0} . Estos cálculos se encuentran en el cuadro 2. La variación en la concentración de electrones del gas de electrones de los diferentes plasmas es pequeña, pero finita y positiva. Como se puede ver en la figura 2, el aumento en la concentración de electrones viene de un desplazamiento de los niveles de energía respecto al potencial químico

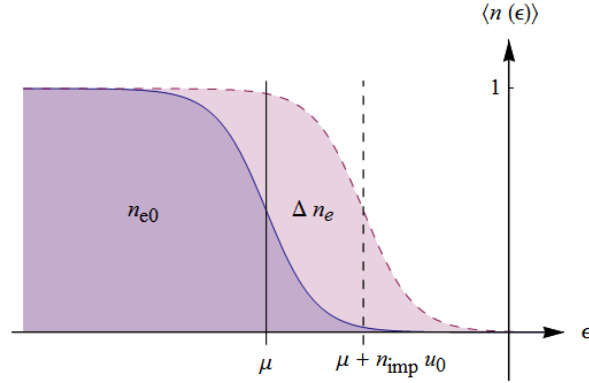


FIGURA 2. Gráfico esquemático de la concentración de estados de un gas de electrones n_e , donde se toman en cuenta la influencia de las impurezas cuando el potencial químico es negativo y Δn_e positivo.

en una cantidad $n_{\text{imp}}u_0$. Dado que estamos tratando un ensamble gran-canónico, se asume que los electrones adicionales ingresan al sistema de los alrededores.

Con respecto a los plasmas de las descargas dc (11) y rf (12) se puede observar que los valores de la carga de la impureza y longitud de Debye están en el rango esperado. Además para estos plasmas, la variación en la concentración de electrones es también apreciable. Por tanto se puede decir que estos plasmas cumplen con las restricciones impuestas y son candidatos idóneos para el análisis del coeficiente de atenuación.

Analizando el coeficiente de acoplamiento de los electrones Γ_e y la temperatura reducida Θ , se puede concluir que para todos los casos $\Gamma_e \ll 1$ y $\Theta \gg 1$, excepto para las llamas y la combustión de cohetes. Esto significa que puede considerarse que el gas de electrones tiene un comportamiento termodinámico. Además, de acuerdo a los datos del cuadro 2, para todos los ejemplos de plasmas con impurezas tenemos un valor de fugacidad pequeño ($z_u \ll 1$). Considerando esto, podemos tomar las aproximaciones para la fugacidad y el potencial químico de las ecuaciones (30) y (31) respectivamente, para calcular la concentración de electrones de (32), es decir

$$n_e = n_{e0} \exp \left\{ \beta n_{\text{imp}} u_0 + \frac{1}{2^{3/2}} n_{e0} \frac{\Lambda^3}{2} \right\}. \quad (37)$$

Como puede observarse, en esta aproximación la concentración de electrones es proporcional a la concentración de electrones original n_{e0} multiplicada por un exponencial que tiene dos términos. El primero viene de la auto-energía de la función de Green y es una contribución causada

CUADRO 2. Variación de la concentración de electrones n_{e0} y otros parámetros para los diferentes plasmas del cuadro 1.

No.	λ_D [m]	Z_d	n_{e0} [m^{-3}]	Δn_{e0} [m^{-3}]	%	Γ_e	Θ	z_u
1	4	1	10^2	3.5×10^{-3}	$3. \times 10^{-3}$	1×10^{-5}	1×10^{14}	5×10^{-22}
2	12	2×10^5	5×10^6	1.7	$3. \times 10^{-5}$	5×10^{-8}	8×10^{14}	3×10^{-23}
3	0.06	1200	10^{10}	9.7×10^6	0.1	6×10^{-5}	5×10^{10}	7×10^{-17}
4	0.3	2400	10^8	29.9	$3. \times 10^{-5}$	1×10^{-6}	1×10^{13}	2×10^{-20}
5	13	2×10^4	10^7	9.0×10^3	0.1	6×10^{-8}	5×10^{14}	6×10^{-23}
6	3	2×10^5	10^7	9.6×10^{35}	$9. \times 10^{30}$	6×10^{-9}	5×10^{15}	∞
7	0.6	2400	10^6	2.5×10^{16}	$2. \times 10^{10}$	1×10^{-6}	1×10^{13}	5×10^{-12}
8	0.01	1	10^9	2.9×10^6	0.3	2×10^{-4}	4×10^{10}	1×10^{-16}
9	3×10^{-6}	69	10^{19}	3.5×10^{16}	0.4	0.02	2×10^5	1×10^{-8}
10	1×10^{-6}	5	10^{18}	9.9×10^{16}	9.9	0.01	5×10^5	3×10^{-9}
11	6×10^{-5}	1×10^5	10^{15}	4.7×10^{12}	0.5	9×10^{-5}	7×10^8	4×10^{-14}
12	3×10^{-5}	3×10^4	10^{15}	4.7×10^{13}	4.7	1×10^{-4}	6×10^8	6×10^{-14}

por las impurezas, y el segundo viene de la corrección del gas de Fermi para la aproximación termodinámica.

4. COEFICIENTE DE ATENUACIÓN Y CAMINO LIBRE MEDIO

Para analizar el coeficiente de atenuación del gas de electrones con impurezas, tomamos como ejemplo el plasma (12) del cuadro 2, que corresponde a un plasma complejo de descarga rf, ya que este presenta el mayor porcentaje en la variación de la concentración de electrones. En este caso por facilidad asumiremos que las impurezas son de aluminio ($Z_{\text{atom}} = 13$), las cuales son también utilizadas experimentalmente en plasmas de descarga [16]. Empezamos considerando la sección eficaz total de un átomo de aluminio para los diferentes energías de un fotón incidente, tomando los datos experimentales de [17], donde la sección eficaz total para la absorción y dispersión de fotones es función de la energía del fotón incidente y del número atómico de los distintos elementos. Por tanto podemos expresar la sección eficaz total del átomo de la siguiente manera

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{tot}}(\hbar\omega, Z_{\text{atom}}). \quad (38)$$

Calculamos el coeficiente de atenuación del gas de electrones con impurezas recordando que la sección eficaz de la dispersión de Compton no se veía modificada por la presencia de las impurezas, es decir

$$\alpha_T = n_{\text{imp}}\sigma_{\text{tot}}(Z_{\text{atom}}, \hbar\omega) + n_e(T_e, n_{e0}, n_{\text{imp}}, u_0)\sigma_C(\hbar\omega). \quad (39)$$

Para analizar la concentración del gas de electrones calculamos el valor numérico de los miembros del exponente de la ecuación (37) con los datos del cuadro 1 del plasma rf. Obtenemos que $\beta n_{\text{imp}} u_0 \approx 0.045$ y $\frac{1}{2^{3/2}} n_{e0} \frac{\Lambda^3}{2} \approx 2.07 \times 10^{-14}$. Por lo tanto, para este caso particular, podemos expandir en series el primer factor y despreciar el segundo. Tomamos el término de segundo orden en la expansión debido a que el valor numérico no es lo suficientemente pequeño. Podemos definir la variación de la concentración del gas de electrones como

$$\Delta n_e = n_{e0} \left\{ \beta n_{\text{imp}} u_0 + \frac{(\beta n_{\text{imp}} u_0)^2}{2} \right\}. \quad (40)$$

Entonces podemos expresar (45) de la siguiente manera

$$n_e(T_e, n_{e0}, n_{\text{imp}}, u_0) = n_{e0} + \Delta n_e(T_e, n_{e0}, n_{\text{imp}}, u_0), \quad (41)$$

es decir, la concentración del gas de electrones corresponde a la suma de la concentración original n_{e0} y un componente positivo Δn_e . Para el plasma que estamos analizando, utilizamos la ecuación (41) para determinar el coeficiente de atenuación total (39)

$$\begin{aligned} \alpha_T &= n_{\text{imp}} \sigma_{\text{tot}}(\hbar\omega, Z_{\text{atom}}) + [n_{e0} + \Delta n_e(T_e, n_{e0}, n_{\text{imp}}, u_0)] \sigma_C(\hbar\omega) \\ &= \alpha_{\text{imp}}(\hbar\omega, Z_{\text{atom}}, n_{\text{imp}}) + \alpha_{e0}(\hbar\omega, n_{e0}) + \Delta\alpha_e(\hbar\omega, T_e, n_{e0}, n_{\text{imp}}, u_0). \end{aligned} \quad (42)$$

donde hemos definido los términos $\alpha_{e0} \equiv n_{e0} \sigma_C$ y $\Delta\alpha_e \equiv \Delta n_e \sigma_C$. Como se puede ver en esta ecuación, el coeficiente de atenuación total α_T se divide en las contribuciones de las impurezas α_{imp} , del gas de electrones libre α_{e0} y el término $\Delta\alpha_e$ que se deriva de la variación de la concentración (41) y está asociado a los efectos cuánticos de la interacción entre las impurezas y los electrones. En la figura 3 hemos graficado el coeficiente de atenuación total α_T dado en (42) y la contribución de los coeficientes α_{imp} , α_e y $\Delta\alpha_e$. Las contribuciones del gas de electrones α_e y $\Delta\alpha_e$, son proporcional a la sección eficaz de la dispersión de Compton σ_C , por lo cual pasan a ser la contribución más significativa para energías del fotón de alrededor de 1 MeV.

A continuación, analizamos el camino libre medio l de un fotón en el gas de electrones con impurezas, debido a que tiene un significado físico más evidente. Su definición es simplemente el inverso del coeficiente de atenuación total, es decir

$$l(\hbar\omega, Z_{\text{atom}}, T_e, n_{e0}, n_{\text{imp}}, u_0) = \frac{1}{\alpha_T} = \frac{1}{\alpha_{\text{imp}} + \alpha_{e0} + \Delta\alpha_e}. \quad (43)$$

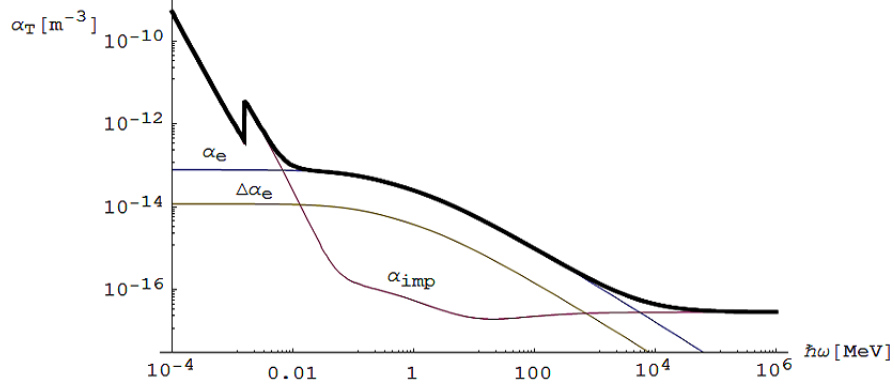


FIGURA 3. Coeficiente de atenuación total α_T de la ecuación (42) para el plasma de descarga rf del cuadro 2 con impurezas de aluminio ($Z_{\text{atom}} = 13$).

Definimos el camino libre medio del gas de electrones sin el efecto de las impurezas como

$$l_0(\hbar\omega, Z_{\text{atom}}, n_{e0}, n_{\text{imp}}) = \frac{1}{\alpha_{\text{imp}} + \alpha_{e0}}. \quad (44)$$

En la figura 4 (a) hemos graficado el camino libre medio del gas de electrones sin el efecto de las impurezas l_0 y con el efecto de las impurezas l_{imp} , en función de la energía de un fotón incidente. Debido a la pequeña variación que experimenta la concentración del gas de electrones n_e a causa de la presencia de las impurezas, en el rango de energías mostrado no se observa diferencia alguna. Sin embargo, de la figura 3 inferimos que los efectos deben ser notorios para energías de alrededor de 1 MeV, por lo tanto, en la figura 4 (b) hemos hecho un acercamiento alrededor de esta energía para observar el comportamiento de l_0 y l_{imp} . Como se observa, l_0 es mayor que l_{imp} en el dominio de energías mostrado, lo cual implica que el fotón disminuye su camino libre medio recorrido. Esto se atribuye a la mayor presencia de electrones, consecuencia del aumento en la concentración ocasionada por los efectos cuánticos de la presencia de impurezas en el gas de electrones.

5. CONCLUSIONES

- En el proceso físico de la interacción entre radiación electromagnética con un plasma con impurezas, se ha considerado analizar el coeficiente de atenuación del sistema. Para esto se ha propuesto como modelo del plasma con impurezas un gas de electrones en el ensamble gran-canónico con impurezas puntuales cargadas con

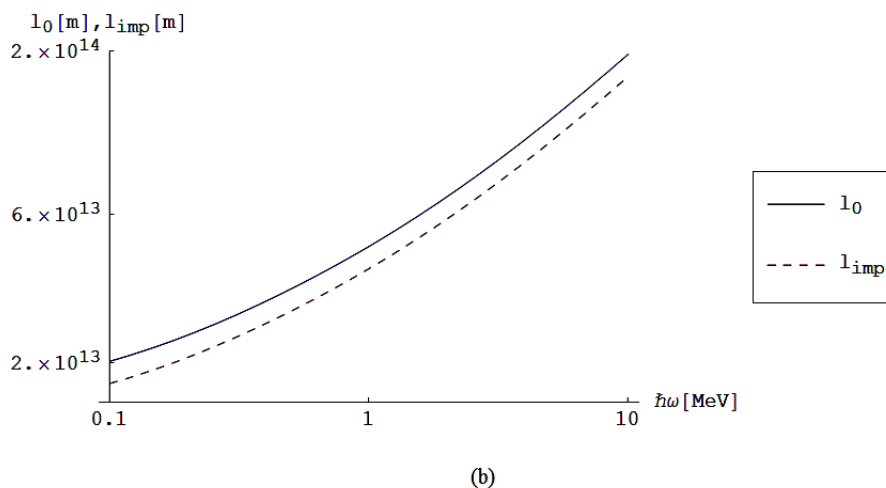
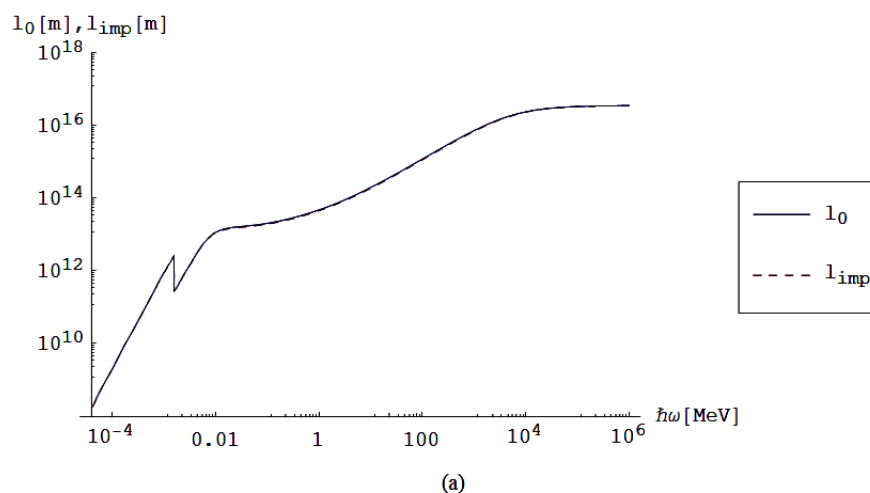


FIGURA 4. Camino libre medio del gas de electrones con impurezas, con el efecto de las impurezas l y sin dicho efecto l_0 . (a) En el rango de energías mostrado, se observa que el efecto global es pequeño y poco notorio. (b) Para energías del fotón de alrededor de 1 MeV. Se puede observar la ligera variación ocasionada al tomar en cuenta la interacción de las impurezas en el gas de electrones.

una concentración y un potencial determinado. Este sistema ha sido descrito mediante el hamiltoniano (14).

- Dado que hemos demostrado que la sección eficaz de dispersión de Compton de un electrón en un gas de electrones no depende

de la concentración del gas, entonces podemos concluir que los efectos a nivel cuántico de la presencia de impurezas en el gas de electrones está ligada sólo a las variaciones en la concentración.

- Se ha calculado la variación de la concentración de electrones en el sistema (20) a partir de la función de Green de promedio de desorden (18). De la primera aproximación en la expansión de la auto-energía (26), se concluye que tiene la misma forma que un gas de Fermi, pero con una fugacidad redefinida en (25). Esta redefinición implica que el sistema se vuelve menos estable debido a que el desplazamiento respecto al potencial químico es positivo.
- Se ha asignado a las impurezas un potencial de Debye y se ha calculado la concentración de electrones para este caso. Debido a que el resultado depende de seis parámetros, se ha tomado los datos experimentales aproximados de varios plasmas con impurezas de [12]. Los resultados de la variación de la concentración de electrones se muestran en el cuadro 2. De aquí se concluye que la presencia de impurezas causan un aumento positivo en la concentración de electrones. Esto se debe a que los niveles de energía se desplazan positivamente respecto al potencial químico (ver figura 2). Dado que estamos tratando con un ensamble gran-canónico, se asume que los electrones adicionales ingresan al sistema de los alrededores.
- Para el análisis del coeficiente de atenuación, se ha tomado el plasma (10) del Cuadro 2 que corresponde a un plasma de descarga rf. Para este plasma se ha calculado el coeficiente de atenuación considerando impurezas de aluminio. Usando la forma (41) de la concentración de electrones, se ha obtenido la expresión (42) que se divide en una contribución de las impurezas, el gas de electrones libre y una contribución asociada con los efectos cuánticos de la interacción entre las impurezas y los electrones. Estos resultados han sido graficados en la Figura 3 donde se ha observado que la contribución más notoria del gas de electrones se presenta para energías del fotón de alrededor de 1 MeV. Esto se debe a que los fotones interactúan con el gas de electrones sólo mediante el efecto Compton.
- Para observar los efectos que provoca la variación de la concentración de electrones en el plasma con impurezas, se ha analizado el camino libre medio (43), que es el inverso del coeficiente de atenuación. En las Figuras 4 (a) y 4 (b) se ha graficado el camino

libre medio con y sin la influencia de las impurezas. La disminución del camino libre medio es una consecuencia del aumento en la concentración de electrones en el plasma con impurezas.

REFERENCIAS

- [1] PAUL M. BELLAN. *Fundamentals of Plasma Physics*. Draft copy published by CUP, Pasadena CA (2004).
- [2] AXEL KÖNIES y KARL KREIGER. *Summer University for Plasma Physics September 27-October 1, 2004*. Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Munich (2004).
- [3] GEORGE W. COLLINS. *The Fundamentals of Stellar Astrophysics*. The Ohio State University, Ohio (2003).
- [4] RUSSEL M. KULSRUD. *Plasma Physics for Astrophysics*. Princeton University Press, Princeton (2005).
- [5] ALEXANDER L. FETTER y JOHN DIRK WALECKA. *Quantum theory of Many-Particle Systems*. McGraw-Hill Book Company, New York (1971).
- [6] JOHN NEGELE y HENRI ORLAND. *Quantum Many-Particle Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City CA (1988).
- [7] GERALD D. MAHAN. *Many-Particle Physics*. Plenum Press, New York (1990).
- [8] ALEXANDRE M. ZAGOSKIN. *Quantum Theory of Many-Body Systems. Techniques and Applications*. Springer-Verlag New York Inc., New York (1998).
- [9] HENRICK BRUSS Y KARSTEN FLENSBERG. *Introduction to Many-body Quantum Theory in Condensed Matter Physics*. Ørsted Laboratory, Niels Bohr Institute, University of Copenhagen y Mikroelektronik Centret, Technical University of Denmark. Copenhagen (2002).
- [10] WALTER GREINER Y JOACHIM REINHARDT. *Quantum Electrodynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin (2003).
- [11] CLAUDE COHEN-TANNOUDJI, BERNARD DIU y FRANCK LALOË. *Quantum Mechanics*. Vol. 1 y 2. John Wiley & Sons, Paris (1977).
- [12] P. K. SHUKLA Y A. A. MAMUN. *Introduction to Dusty Plasma Physics*. Institute of Physics Publishing, Bristol (2002).
- [13] FRANZ SCHWABL. *Statistical Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin (2006).
- [14] GEORGE B. ARFKEN Y HANS J. WEBER. *Mathematical Methods for Physicist*. International Edition. 6th. Edition. Elsevier Inc., San Diego (2005).
- [15] WALTER GREINER, LUDWING NEISE y HORST STRÖCKER. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Springer-Verlag New York Inc., New York (1995).
- [16] V. N. TSYTOVICH et al: *Elementary Physics of Complex Plasmas*, Lect. Notes Phys. **731**, 67 - 140 (2008)
- [17] M. J. BERGER et.al. *NIST XCOM: Photon Cross Sections Database*. Modificado: Agosto 2005. NIST Standard Reference Database 8. Acceso: 20 de agosto de 2008. <<http://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/Text/XCOM.html>>, <http://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/Text/XCOM.html>

JORGE FRAGA

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL, FACULTAD DE CIENCIAS, CARRERA DE FÍSICA,
LADRÓN DE GUEVARA E11-253, APARTADO 17-01-2759, QUITO, ECUADOR

E-mail address: jorgefraga911@yahoo.com

ERICSON LÓPEZ

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL, FACULTAD DE CIENCIAS, DEPARTAMENTO
DE FÍSICA Y OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE QUITO, LADRÓN DE GUEVARA
E11-253, APARTADO 17-01-2759, QUITO, ECUADOR

E-mail address: ericsonl@hotmail.com