GUIA DE ESTUDIO DEL EXAMEN DE MEDIA CARRERA
ÁLGEBRA LINEAL

Ejercicio 1. *Sea V un espacio vectorial y W_1, W_2 dos subespacios vectoriales de V, entonces:*

a) $W_1 \cap W_2$ *es un sub-espacio vectorial de* V.

b) $W_1 \cup W_2$ *es un sub-espacio vectorial de* V.

c) $W_1 \cap W_2$ *y* $W_1 \cup W_2$ *son sub-espacios vectoriales de* V.

d) $W_1 \cap W_2$ *y* $W_1 \cup W_2$ *no son sub-espacios vectoriales de* V.

Solución. Consideremos la intersección de subespecies vectoriales. Necesitamos verificar que $0 \in W_1 \cap W_2$ y que $\alpha u + v \in W_1 \cap W_2$. Ya que W_1 y W_2 son sub espacios vectoriales, el elementos 0 pertenece a $W_1 \cap W_2$ y $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Ahora, sea $u, v \in W_1 \cap W_2$ y un escalar $\alpha \in K$. Por hipótesis se conoce que W_1 es subespacio vectorial y $u, v \in W_1$, entonces se cumple que $\alpha u + v \in W_1$. Similar resultado se tiene para W_2. Por tanto, podemos afirmar que $W_1 \cap W_2$ es un subespacio vectorial.

Por otro lado, podemos tomar $W_1 = \{(x, y, z) : y = z\}$ y $W_2 = \{(x, y, z) : x = y - z\}$ dos subespacios vectoriales. Si $u = (1, 2, 2) \in W_1$ y $v = (1, 2, 1) \in W_2$ y calculamos $u + v = (2, 4, 3)$, se puede verificar que no pertenece a W_1 o a W_2. Por tanto, podemos concluir que $W_1 \cup W_2$ no es un subespecie vectorial y la respuesta correcta para el presente problema es el literal a). □

Ejercicio 2. *Sea V un espacio vectorial y W_1, W_2 dos sub-espacios vectoriales de V. Si $W_1 \subseteq W_2$, entonces:*

a) $W_1 \cap W_2$ *es un subespacio vectorial y* $W_1 \cup W_2$ *no es un subespacio vectorial.*

b) $W_1 \cup W_2$ *es un subespacio vectorial y* $W_1 \cap W_2$ *no es un subespacio vectorial.*

c) $W_1 \cap W_2$ *y* $W_1 \cup W_2$ *son subespacios vectoriales.*

d) $W_1 \cap W_2$ *y* $W_1 \cup W_2$ *no son subespacios vectoriales.*

Solución. Tomando como referencia el ejercicio anterior, se conoce que la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial. Por otro lado, se conoce que $W_1 \subseteq W_2$ y se tiene que $W_2 = W_1 \cup W_2$. Esto implica que tanto la unión como la intersección de subespacios es un subespecie vectorial, concluyendo que la respuesta correcta es la opción c). □

Ejercicio 3. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $\{W_1, \ldots, W_k\}$ subespacios vectoriales con bases $\{B_1, \ldots, B_k\}$ y $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?.*

a) $dim(V) = \sum_{i=1}^{k} dim(W_i)$

b) $B_i \cap B_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j$.

c) $\cup_{I=1}^{k} B_i$ *no genera a* V.

d) $W_i \cap W_j = \{0\}$ *para todo* $i \neq j$.

Solución. Si el espacio V puede ser expresado como suma directa de los subespacios, implica que todo $v \in V$ puede ser escrito de forma única como $v = w_1 + \ldots, w_k$, con $w_i \in W_i$. Además, cada elemento del subespacio W_i puede ser expresado como combinación lineal de los elementos de la base B_i de W_i. Ya que V es expresado como suma directa se tiene que $W_i \cap W_j = \{0\}$ para todo $i \neq j$ y por tanto $B_i \cap B_j = \emptyset$. Entonces, podemos concluir que la unión de las bases genera a V. Esto nos permite determinar que lo expresado en el literal c) es falso. □

Ejercicio 4. *Suponga que $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}$ son matrices invertibles. Determine la respuesta correcta:*

a) El producto AB es invertible, con inversa $A^{-1}B^{-1}$.

b) El producto AB es invertible, con inversa $B^{-1}A^{-1}$.

c) El producto AB no es invertible.

d) El producto AB es invertible, solo si $|A| = 0$ o $|B| = 0$.

Solución. Como las matrices A, B son invertibles, es posible calcular la inversa de la siguiente forma:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}) = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Y en forma similar:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B) = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

Tomando $C = AB$ y $D = B^{-1}A^{-1}$, se tiene que $D = C^{-1}$. □

Ejercicio 5. *Para alguna matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$, A es invertible si y solo si:*

a) La matriz traspuesta A^T es invertible, con $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

b) La matriz A es simétrica, con $(A)^{-1} = (A^{-1})^T$.

c) La matriz traspuesta A^T es invertible, con $(A^T)^{-1} \neq (A^{-1})^T$.

d) Ninguna de las anteriores.

Solución. Es posible calcular la inversa de la siguiente forma:

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = (I_n)^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T(A^T)$$

Si tomamos $C = A^T$ y $D = (A^{-1})^T$. Por tanto, la respuesta esta asociado al literal a). □

Ejercicio 6. *Dada la siguiente matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz anterior es diferente de cero si:

a) $x_i \geq 0$, para todo $i = 1, 2, 3$.

b) $x_1 = 1$ y $x_2 \neq x_3$.

c) $x_i \neq x_j$, para todo $i, j = 1, 2, 3$, con $i \neq j$.

d) $x_i = x_j$, para todo $i, j = 1, 2, 3$.

Solución.

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_1^2 & x_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} \\ &= (x_2x_3^2 - x_2^2x_3) - (x_1x_3^2 - x_1^2x_3) + (x_1x_2^2 - x_1^2x_2) \\ &= (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Por tanto, para satisfacer que $det(A) \neq 0$ se debe cumplir que $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, es decir, el literal c) es el correcto. □

Ejercicio 7. *Sean $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}$ con A invertible. Entonces $|AB - \lambda I|$ es igual a:*

a) $|(AB)^{-1} - \lambda I|$.

b) $|A^{-1}B - \lambda I|$

c) $|BA - \lambda I|$.

d) $|BA^{-1} - \lambda I|$.

Solución. Conociendo que la matriz A es invertible, se tiene:

$$\begin{aligned}
|AB - \lambda I| &= |AB - \lambda(AA^{-1})| \\
&= |A(B - \lambda A^{-1})| \\
&= |A| \times |B - \lambda A^{-1}| \\
&= |B - \lambda A^{-1}| \times |A| \\
&= |(B - \lambda A^{-1})A| \\
&= |BA - \lambda I|
\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que la respuesta correcta corresponde al literal c). □

Ejercicio 8. *Sea* $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(R^3, R^3)$ *tal que* $\mathcal{T}(x, y, z) = (y - z, x + z, -x + y)$. *Sea* $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ *y* C *la base canónica. Podemos decir que:*

a) La transformación lineal es invertible.

b) La transformación lineal no es invertible.

c) $[\mathcal{T}]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ *y es invertible.*

d) $[\mathcal{T}]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *y no es invertible.*

Solución. Podemos calcular las imágenes de cada vector:

$\mathcal{T}(1, 1, 0) = (1 - 0, 1 + 0, -1 + 1) = (1, 1, 0) = 1.(1, 0, 0) + 1.(0, 1, 0) + 0.(0, 0, 1)$
$\mathcal{T}(1, 0, 1) = (-1, 2, 1) = -1.(1, 0, 0) + 2.(0, 1, 0) + (-1).(0, 0, 1)$
$\mathcal{T}(0, 1, 1) = (0, 1, 1) = 0.(1, 0, 0) + 1.(0, 1, 0) + 1.(0, 0, 1)$

Estas coordenadas nos proporcionan las columnas de la matriz asociada:

$$[\mathcal{T}]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de la matriz anterior es distinto de cero, entonces podemos decir que la transformación lineal es invertible y se tiene:

$$\mathcal{T}(x, y, z) = (y - z, x + z, -x + y) = (a, b, c)$$

y resolviendo el sistema se tiene:

$$\mathcal{T}(a, b, c) = \frac{1}{2}(a + b - c, a + b + c, -a + b + c)$$

Por lo que podemos concluir que el literal a) es el correcto. □

Ejercicio 9. *Para algún número racional t, se construye la matriz:*

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

Sea λ un valor propio de A_t con vector propio asociado v. Entonces:

a) $\lambda = t$

b) $\lambda^2 = t$

c) $\lambda = 1/2$

d) $\lambda^2 = t^2$

Solución. Para algún número racional t, se construye la matriz:

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

tal que su cuadrado es:

$$A_t^2 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = tI$$

Sea λ un valor propio de A_t con vector propio asociado v. Entonces por un lado se tiene:

$$A_t^2 = A_t(A_t(v)) = A_t(\lambda v) = \lambda A_t(v) = \lambda^2 v$$

Por otro lado se cumple que:

$$A_t^2(v) = tI(v) = tv$$

De este modo podemos concluir que $\lambda^2 = t$.

- $t = 1$: Entonces $\lambda^2 = 1, \lambda = \pm 1$ con un valor propio $\lambda = 1$ y un vector propio asociado $v = (1, 1)$ y valor propio $\lambda = -1$ con valor propio asociado $v = (1, -1)$

- $t = 2$: El valor propio sale de los número racionales y tenemos que $\lambda = \pm\sqrt{2}$, donde el valor propio $\lambda = \sqrt{2}$ tiene el vector propio asociado $v = (1, \sqrt{2})$ y el valor propio $\lambda = -\sqrt{2}$ tiene el vector propio asociado $v = (1, -\sqrt{2})$

□

Ejercicio 10. *Sea $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V)$ un operador lineal. Identifique la opción verdadera.*

a) Los valores propios de $\mathcal{T}$ depende de la matriz asociada respecto a la base.

b) Los valores propios de $\mathcal{T}$ no depende de la matriz asociada respecto a cualquier base.

c) Los valores propios de $\mathcal{T}$ son siempre distintos dependiendo de la base.

d) Ninguna de las anteriores.

Solución. Sean S y T dos bases del espacio vectorial V y las matrices asociadas $A = [\mathcal{T}]_S$ y $B = [\mathcal{T}]_T$ a las bases, respectivamente. Sea P la matriz de cambio de base de T a S, tal que se cumple que $B = PAP^{-1}$, es decir A y B son matrices similares. De este modo podemos concluir que el literal b) es el correcto. □

Ejercicio 11. *Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ una matriz cuadrada y $\mathcal{T}_A$ la transformación lineal asociada. $\mathcal{T}_A$ es invertible si y solo si:*

a) el núcleo de la aplicación lineal es de dimensión igual a n.

b) la ecuación $Ax = 0$ tiene una única solución $x \neq 0$.

c) la ecuación $Ax = 0$ tiene múltiples soluciones, con $x \neq 0$.

d) la ecuación $Ax = 0$ tiene solo la solución trivial $x = 0$.

Solución. Supongamos que $\mathcal{T}$ es invertible, entonces podemos decir que la aplicación lineal $\mathcal{T}$ es un isomorfismo. Esto implica que el núcleo de la aplicación lineal es igual a $\{0\}$ (dim=0) que puede ser expresado por $\mathcal{T}_A(x) = 0 = Ax$ determinando que existe una única solución $x = 0$. En sentido

contrario, supongamos que el sistema $Ax = 0$ dispone únicamente de la solución trivial, entonces se tiene que para cualquier $x \neq 0$ el sistema $Ax \neq 0$. Ya que la dimensión del núcleo es 0 y $Ax = Im(\mathcal{T}_A)$ es de dimensión n, entonces la aplicación es un isomorfismo y A es invertible. Por tanto, podemos afirmar que la opción correcta es el literal d) $\square$

Ejercicio 12. *El límite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$$

es igual a:

a) 0.

b) $\frac{1}{2}$.

c) 2.

d) 1

Solución. Aplicando el teorema de L'Hopital, se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que la respuesta correcta es el literal c). □

Ejercicio 13. *El límite:*

$$\lim_{x\to 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}}$$

es igual a:

a) 1.

b) e^2.

c) $\frac{1}{2}$.

d) $e^{1/2}$.

Solución. Sea $y = (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$, entonces:

$$\begin{aligned} ln(y) &= ln\Big((1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}\Big) \\ &= \frac{1}{e^x-1-x} ln(1+x^2) \end{aligned}$$

Y aplicando el teorema de L'Hopital, se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} ln(y) &= \lim_{x\to 0} ln\Big((1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}\Big) \\ &= \lim_{x\to 0} \Big(\frac{ln(1+x^2)}{e^x-1-x}\Big) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-1} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^x(1+x^2)+2x(e^x-1)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Despejando y de la expresión anterior, se tiene que $\lim_{x\to 0} y = e^2$. Concluyendo de este modo que la respuesta correcta es b). □

Ejercicio 14. *Dadas las funciones* $f(x) = \sqrt{x + sin^2(\pi x)}$, $g(x) = \sqrt{1+x^4}$ *y* $h(x) = \int_0^{f(x)} g(x)dx$ *. El valor de* $h'(1)$ *es:*

a) $2\sqrt{3}$.

b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) 1

Solución. Definimos $h(x) = \int_0^{f(x)} g(x)dx = G(x)|_0^{f(x)} = G(f(x)) - G(0)$. Obteniendo la derivada de la función anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} h'(x) &= G(f(x))' \\ &= g(f(x))f(x)' \\ &= \sqrt{1+\Big(\sqrt{x+\sin^2(\pi x)}\Big)^4}\Big(\sqrt{x+\sin^2(\pi x)}\Big)' \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+\Big(x+\sin^2(\pi x)\Big)^2} \times \Big(\frac{1+2\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x)}{\sqrt{x+\sin^2(\pi x)}}\Big) \end{aligned}$$

Evaluando la función anterior en 1, se tiene $h'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, concluyendo que la respuesta correcta es c). $\square$

Ejercicio 15. *Para la secuencia* $y_n = \frac{a^n}{n!}$ *, con* $a > 0$*. El valor de* $\lim_{n\to+\infty} y_n$ *es:*

a) $\sqrt{3}$.

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) 1

d) 0.

Solución. Sea N un entero positivo tal que $N \geq 2a$. Claramente, para un entero $n > N$ se tiene $\frac{a}{n} < \frac{1}{2}$. Así:

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^N a^{n-N}}{N!(N+1)\dots n} = \frac{a^n}{N!}\frac{a}{N+1}\frac{a}{N+2}\cdots\frac{a}{n} < \frac{a^n}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$$

Por lo que se obtiene:

$$0 = x_n < \frac{a^n}{n!} < z_n = \frac{a^n}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$$

Obteniendo el límite, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

Concluyendo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Por tanto, la respuesta correcta corresponde a la opción d). $\square$

Ejercicio 16. *Sea* $\{F_n\}$ *la serie de Fibonacci. El valor de*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$$

es:

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

c) $(3+\sqrt{5})$.

d) $(\frac{1}{2}+\sqrt{5})$.

Solución. Considerando la serie de Fibonacci $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, el límite puede ser expresado:

$$a = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_n + F_{n-1}}{F_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right) = 1 + \frac{1}{a}$$

Así, en función de la variable a se tiene:

$$a^2 = 1 + a$$

Lo que genera como solución $a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Por tanto, la solución es la opción b). □

Ejercicio 17. *La n-ésima derivada de la función $f(x) = a^x$ es:*

a) $x^a ln(a)$.

b) $a^x ln^n(a)$.

c) $ln^n(a)$.

d) $a^x + ln^n(a)$.

Solución. Podemos obtener las derivadas:

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= a^x ln(a) \\ f^{''}(x) &= a^x ln^2(a) \\ f^{'''}(x) &= a^x ln^3(a) \\ &\dots \end{aligned}$$

Obteniendo por inducción $f^{(n)} = a^x ln^n(a)$. Así, la respuesta es la opción b). □

Ejercicio 18. *Sea $f(x) = \cos(x)$ y $x = \sqrt{t}$. La segunda derivada de $f(x)$ es igual a:*

a) $\cos(x)\frac{1}{4t^{3/2}}dt^2 - \frac{\sin(t)}{4t}dt^2$

b) $\frac{\sin(x)}{t^{1/2}}dt - \frac{cos^2(x)}{4t}dt^2$

c) $\sin(x)\frac{1}{4t^{3/2}}dt^2 - \cos(x)\frac{1}{4t}dt^2$

d) Ninguna de las anteriores

Solución. La primera derivada de $f(x)$ puede ser expresada:

$$f^{'}(x) = -\sin(x).\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = -\sin(x).dx$$

Derivando la función anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= -\cos(x).dx^2 - \sin(x).d^2x \\ &= -\cos(x)dx^2 - \sin(x).x^{(2)}dt^2 \\ &= -\cos(x)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2 dt^2 - \sin(x)\left(-\frac{1}{4t^{3/2}}\right)dt^2 \\ &= \sin(x)\frac{1}{4t^{3/2}}dt^2 - \frac{1}{4t}\cos(x)dt^2 \end{aligned}$$

Se concluye identificando que la opción c) es la correcta. □

Ejercicio 19. *La función:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \textit{ si } x \leq x_0 \\ ax + b, \textit{ si } x > x_0 \end{cases}$$

será diferenciable en el punto x_0:

a) si $a = 2x_0$ y $b = -x_0^2$ para que $f(x)$ sea continua en x_0.

b) si $a = b = 2x_0$.

c) si $a = 2x_0$ y $b = -x_0^2$ y $f'(x_0)$ finita.

d) si $a = x_0$ y $b = -2x_0^2$.

Solución. Para que la función f sea diferenciable en el punto x_0 es necesario y suficiente que exista una derivada finita $f'(x_0)$. Iniciamos verificando las condiciones para la continuidad de la función. Esto implica que debe existir límite en en el punto x_0, lo que determina que $a = 2x_0$ y $b = -x_0^2$. Ahora por definición de derivada se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2x_0(x_0 + \triangle x) - x_0^2 - x_0^2}{\triangle x} \end{aligned}$$

Generando una derivada finita. Así, la solución al presente problema es el literal c). □

Ejercicio 20. *Se conoce que un rectángulo dispone de un perímetro igual a α metros, con $\alpha > 0$. Las dimensiones de dicho rectángulo tal que su área sea maximizada son:*

a) ancho igual a $\frac{\alpha}{6}$ y largo igual a $\frac{\alpha}{3}$.

b) ancho igual a $\frac{\alpha}{4}$ y largo igual a $\frac{\alpha}{4}$.

c) ancho igual a $\frac{3\alpha}{8}$ y largo igual a $\frac{\alpha}{8}$.

d) ancho igual a $\frac{\alpha}{2}$ y largo igual a $\frac{\alpha}{2}$.

Solución. Sea x y y el largo y ancho del rectángulo, respectivamente. Se conoce que el perímetro esta dado por $2x + 2y = \alpha$ y se desea maximizar el área $A = x * y$ del mismo. Despejando $y = \frac{\alpha}{2} - x$ de la ecuación del perímetro y reemplazando en la ecuación del área se tiene:

$$A = x(\frac{\alpha}{2} - x) = \frac{\alpha}{2}x - x^2, \quad x \in [0, \alpha]$$

Derivando la función anterior:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\alpha}{2} - 2x = 0$$

Se obtiene que $x = \frac{\alpha}{4}$ y por tanto $y = \frac{\alpha}{4}$, determinando de este modo que la solución es seleccionar la opción b). $\square$

Ejercicio 21. *Considere la función continua en $[0, 1]$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & si\ x \in (0, 1] \\ 1, & si\ x = 0 \end{cases}$$

Determine la relación correcta:

a) $e^{-1/e} \leq \int_0^1 x^x dx \leq 1$.

b) $1/3 \leq \int_0^1 x^x dx \leq e$.

c) $\int_0^1 x^x dx \geq 1$.

d) $0 \leq \int_0^1 x^x dx \leq e^{1/2}$.

Solución. Iniciamos calculando la primera derivada de la función e igualando a cero. Así, sea $f(x) = u(x)^{v(x)}$ se tiene:

$$f(x)' = [u(x)^{v(x)}]' = u(x)^{v(x)}\Big(v'(x)ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\Big)$$

Obteniendo $f'(x) = x^x(ln(x) + 1) = 0$ y el punto crítico $x_0 = e^{-1}$. Así, evaluando $f(e^{-1}) = e^{-1/e}$ es el mínimo global de f en $[0, 1]$ y se sigue que:

$$e^{-1/e} \leq \int_0^1 x^x dx \leq 1$$

Por tanto, la respuesta correcta al presente ejercicio es el literal a). $\square$