Guía del estudiante para los exámenes de Media Carrera de Matemática Aplicada – 2024A.

Documento elaborado por la Comisión para la Gestión del Examen de Autoevaluación de Media Carrera y de Fin de Carrera para la carrera de Matemática Aplicada (CPGEA)

Según el Art. 2 de la normativa CD-07-2022: *a) El Examen de Autoevaluación de Media Carrera (EAMC) es un instrumento de autoevaluación que valora la consecución de los resultados de aprendizaje relacionados con conocimientos, habilidades, valores y actitudes establecidos en el perfil de egreso de la carrera y obtenidos durante los primeros niveles de la carrera.*

1. Asignaturas a ser evaluadas y duración del examen:

La CPGEA ha determinado que las asignaturas que se considerarán en el examen de autoevaluación de media carrera son:

Unidad	Asignatura (según PEA 2020)
Básica	Cálculo diferencial
	Cálculo integral
	Algebra lineal
	Probabilidad y estadística
	Ecuaciones diferenciales ordinarias.
Profesional	Cálculo de Fourier con Aplicaciones a las EDPs
	Control de calidad y Diseño de experimentos
	Programación Lineal
Social y humanística	Comunicación oral y escrita

Las preguntas serán 40 reactivos de opción múltiple de distintas dificultades (básico, medio y alto). Cada pregunta deberá leerse y responderse en un tiempo de 3 minutos en promedio. **La duración del examen será de 2 horas. Este examen será presencial en los laboratorios de la Facultad de Ciencias de la EPN. La comisión ha decidido no permitir el uso de formularios.**

2. De los estudiantes habilitados

Los estudiantes habilitados para rendir este examen de la carrera de Matemática Aplicada serán aquellos que hayan aprobado todo el nivel referencial 4 y además Programación Lineal de quinto semestre. Esto está deacuerdo al Art. 3 de la normativa CD-07-2022.

3. Cronograma

Actividad	Fecha
Convocatoria preliminar a los estudiantes que cumplen los requisitos	Hasta el 10/06/2024
Convocatoria final a los estudiantes que cumplen los requisitos	Hasta el 12/06/2024
Envío de información sobre el examen y la guía para el estudiante a los estudiantes convocados.	Hasta el 27/06/2024
Reunión informativa con los estudiantes convocados	Hasta el 04/07/2024

Aplicación del Examen de media carrera de Matemática Aplicada	11/07/2024
Retroalimentación por parte de los estudiantes	Hasta el 30/07/2024
Emisión del informe	Hasta el 18/07/2024
Notificación de resultados a los estudiantes	Hasta el 25/07/2024

4. Obligatoriedad del Examen de Autoevaluación de Media Carrera

Los exámenes de autoevaluación de media carrera son de carácter obligatorio para los estudiantes matriculados que cumplan con los criterios establecidos en el punto 2.

Solo en casos de fuerza mayor, si un estudiante no rindió el examen de autoevaluación de media carrera en los periodos que le correspondía, podrá solicitar a la Máxima Autoridad de la unidad académica la autorización para rendir el examen atrasado en una fecha posterior o en el siguiente periodo académico, presentando la justificación correspondiente debidamente avalada por la dirección de Bienestar Politécnico. La autorización la emitirá la misma autoridad.

El estudiante podrá justificar su inasistencia dentro de los 5 días posteriores a la fecha de realización del examen, o dentro de 5 días posteriores a la fecha de superado el caso fortuito o fuerza mayor.

En caso de que el estudiante no justifique su inasistencia al examen, el Subdecano presentará el caso ante el Consejo de Facultad para que se analice la situación y de ser el caso, autorice de forma extemporánea el rendir el examen en la siguiente convocatoria.

5. Resultados

Se considera satisfactorio el resultado obtenido en el examen de autoevaluación de media carrera, cuando el estudiante obtenga una nota igual o superior al 70%. Se considera no satisfactorio cuando el estudiante obtenga una nota inferior al 70%. En el currículo académico del estudiante, se registrará el haber rendido el examen de autoevaluación de media carrera como requisito y se presentará la nota obtenida sobre diez (10) puntos y con dos decimales. La calificación del examen no se tomará en cuenta en el cálculo del promedio o del IRA.

6. Estímulos por Aprobar el Examen de Autoevaluación de Media Carrera

Para los estudiantes que aprueben satisfactoriamente el examen de autoevaluación de media carrera, la Máxima Autoridad de la unidad académica emitirá un certificado de reconocimiento.

El estudiante que obtenga la mejor nota, siempre y cuando esta sea satisfactoria (de acuerdo al punto anterior), será acreedor a una beca por excelencia académica. Para esto, posterior a la notificación de notas, el subdecano realizará los trámites pertinentes para realizar esta solicitud.

En caso de que la unidad académica haya gestionado pasantías, los estudiantes que obtuvieron una nota mayor al 70% en el examen de autoevaluación de media carrera tendrán prioridad en el proceso de asignación a este tipo de práctica pre-profesional. Para el efecto, el Subdecano deberá remitir el listado de estudiantes que cumplan con este criterio a las CPP.

La nota obtenida en el examen de autoevaluación de media carrera podrá ser empleada como parte del análisis en los procesos de contratación para ayudantes de cátedra, y se otorgará en dichos procesos una bonificación del 10% de la nota obtenida en la evaluación de la carpeta a aquellos postulantes que hayan obtenido una nota superior al 70% en estos exámenes. El postulante remitirá una copia del certificado de reconocimiento como parte de la documentación requerida en estos procesos.

Adicionalmente, en caso de ser factible, aquellos estudiantes que obtengan una nota superior al 70% en el examen de autoevaluación de media carrera podrán solicitar acceso preferencial a los primeros turnos planificados de matrículas ordinarias en su carrera. Esta actividad estará a cargo del Subdecano.

7. Breve explicación del Proceso

Antes del examen:

- Estar atento al correo electrónico institucional ya que por ese medio se enviará toda la información referente al proceso.
- Después de la convocatoria preliminar, revisar si cumple con los criterios establecidos en el punto 2. Si no los cumple y ha sido convocado, o si cumple los requisitos y no ha sido convocado, indicar inmediatamente al subdecanato de la Facultad de Ciencias (mayra.guznay@epn.edu.ec).
- Asistir a la reunión informativa convocada por la Comisión para la Gestión del Examen de Autoevaluación de Media Carrera. La convocatoria a esta reunión será realizada a su respectivo tiempo por correo electrónico.
- Asistir 30 minutos antes de la hora del examen para las verificaciones respectivas, tener consigo la cédula de identidad o pasaporte.
- El aula para realizar el examen será dada a conocer mediante correo electrónico.

Durante el examen:

- No se permitirá el ingreso al aula una vez que el examen haya iniciado.
- El estudiante debe comprometerse a tener abierto solamente un navegador web, con la página web del aula virtual exclusivamente.
- Una vez iniciado el examen, se prohíbe tanto el uso como la tenencia de cualquier material de consulta o ayuda, físico o digital, así como de dispositivos electrónicos de comunicación o almacenamiento de datos.
- Los teléfonos celulares deberán permanecer apagados y de preferencia el estudiante no deberá tenerlos consigo.
- El estudiante durante la rendición del examen, deberá abstenerse de realizar actividades fraudulentas como:
  - Copiar o intentar copiar mediante cualquier medio.
  - Contactar a otra persona utilizando cualquier medio de comunicación para recibir ayuda no autorizada.
  - Suplantar la identidad o falsificar documentos.
  - Incumplir las indicaciones de los docentes responsables de supervisar la realización del examen. Alterar el normal desarrollo del examen.
- Iniciado el examen, el estudiante no podrá ausentarse del mismo antes de su finalización, a menos de que el docente establezca que puede hacerlo. El abandono del examen supondrá su renuncia al mismo y la nota que será registrada en el examen será 0 (cero).

Toda la información referente a los exámenes de media carrera será enviada a los convocados vía correo electrónico y también se la ubicará en la página web de la facultad:

https://ciencias.epn.edu.ec/index.php/menuestudiantes/facultad-formularios-3/examen-de-media-carrera

8. Ejercicios resueltos

En la sección anexa a este documento se encuentran ejercicios propuestos y ejercicios resueltos de referencia para el examen de autoevaluación de media carrera. Este documento se colocará también en la página web.

Quito, 21 de mayo de 2024

Firmado electrónicamente por:
MARIA FERNANDA
SALAZAR MONTENEGRO

Dra. Fernanda Salazar.

Coordinadora de la comisión para la Gestión del Examen de Autoevaluación de Media Carrera para la carrera de Matemática Aplicada.

ANEXO

GUIA DE ESTUDIO DEL EXAMEN DE MEDIA CARRERA MATEMATICA APLICADA

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1. *Se lanzan dos dados. Cuál es la probabilidad de que en los dos dados salga 3, si se sabe que la suma es seis?*

1. *0,3*
2. *0,2*
3. *0,4*
4. *0,25*

Ejercicio 2. *Para estimar la media de una población de varianza desconocida, a través de un intervalo de confianza al 95% de confianza, se toma una muestra de tamaño* $n = 25$ *cuyas medidas estadísticas son:* $\bar{x} = 18.5, s^2 = 4$, *además se tiene que* $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ *y* $t_{\frac{\alpha}{2},19} = 2.093$*; ¿el intervalo es?*

1. *(17.72;19.28)*
2. *(16.85;20.15)*
3. *(17.67;19.33)*
4. *(16.93; 20.07)*

Ejercicio 3. *Para la ecuación diferencial de primer orden:* $(2y^2 + 4x^2y)dx + (3x^3 + 4xy)dy = 0$ *un factor integrante es:*

1. $\mu = xy$.
2. $\mu = x^2y$.
3. $\mu = x^2y^2$.
4. $\mu = xy^2$.

EJERCICIOS RESUELTOS

ÁLGEBRA LINEAL

Ejercicio 4. *Sea V un espacio vectorial y W_1, W_2 dos subespacios vectoriales de V, entonces:*

a) $W_1 \cap W_2$ *es un sub-espacio vectorial de V.*

b) $W_1 \cup W_2$ *es un sub-espacio vectorial de V.*

c) $W_1 \cap W_2$ *y* $W_1 \cup W_2$ *son sub-espacios vectoriales de V.*

d) $W_1 \cap W_2$ *y* $W_1 \cup W_2$ *no son sub-espacios vectoriales de V.*

Solución. Consideremos la intersección de subespecies vectoriales. Necesitamos verificar que $0 \in W_1 \cap W_2$ y que $\alpha u + v \in W_1 \cap W_2$. Ya que W_1 y W_2 son sub espacios vectoriales, el elementos 0 pertenece a $W_1 \cap W_2$ y $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Ahora, sea $u, v \in W_1 \cap W_2$ y un escalar $\alpha \in K$. Por hipótesis se conoce que W_1 es subespacio vectorial y $u, v \in W_1$, entonces se cumple que $\alpha u + v \in W_1$. Similar resultado se tiene para W_2. Por tanto, podemos afirmar que $W_1 \cap W_2$ es un subespacio vectorial.

Por otro lado, podemos tomar $W_1 = \{(x, y, z) : y = z\}$ y $W_2 = \{(x, y, z) : x = y - z\}$ dos subespacios vectoriales. Si $u = (1, 2, 2) \in W_1$ y $v = (1, 2, 1) \in W_2$ y calculamos $u + v = (2, 4, 3)$, se puede verificar que no pertenece a W_1 o a W_2. Por tanto, podemos concluir que $W_1 \cup W_2$ no es un subespecie vectorial y la respuesta correcta para el presente problema es el literal a). $\square$

Ejercicio 5. *Sea V un espacio vectorial y W_1, W_2 dos sub-espacios vectoriales de V. Si $W_1 \subseteq W_2$, entonces:*

a) $W_1 \cap W_2$ *es un subespacio vectorial y* $W_1 \cup W_2$ *no es un subespacio vectorial.*

b) $W_1 \cup W_2$ *es un subespacio vectorial y* $W_1 \cap W_2$ *no es un subespacio vectorial.*

c) $W_1 \cap W_2$ *y* $W_1 \cup W_2$ *son subespacios vectoriales.*

d) $W_1 \cap W_2$ *y* $W_1 \cup W_2$ *no son subespacios vectoriales.*

Solución. Tomando como referencia el ejercicio anterior, se conoce que la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial. Por otro lado, se conoce que $W_1 \subseteq W_2$ y se tiene que $W_2 = W_1 \cup W_2$. Esto implica que tanto la unión como la intersección de subespacios es un subespecie vectorial, concluyendo que la respuesta correcta es la opción c). $\square$

Ejercicio 6. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $\{W_1, \ldots, W_k\}$ subespacios vectoriales con bases $\{B_1, \ldots, B_k\}$ y $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?.*

a) $dim(V) = \sum_{i=1}^{k} dim(W_i)$

b) $B_i \cap B_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j$.

c) $\cup_{I=1}^{k} B_i$ *no genera a* V.

d) $W_i \cap W_j = \{0\}$ *para todo* $i \neq j$.

Solución. Si el espacio V puede ser expresado como suma directa de los subespacios, implica que todo $v \in V$ puede ser escrito de forma única como $v = w_1 + \ldots, w_k$, con $w_i \in W_i$. Además, cada elemento del subespacio W_i puede ser expresado como combinación lineal de los elementos de la base B_i de W_i. Ya que V es expresado como suma directa se tiene que $W_i \cap W_j = \{0\}$ para todo $i \neq j$ y por tanto $B_i \cap B_j = \emptyset$. Entonces, podemos concluir que la unión de las bases genera a V. Esto nos permite determinar que lo expresado en el literal c) es falso. □

Ejercicio 7. *Suponga que* $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}$ *son matrices invertibles. Determine la respuesta correcta:*

a) *El producto* AB *es invertible, con inversa* $A^{-1}B^{-1}$.

b) *El producto* AB *es invertible, con inversa* $B^{-1}A^{-1}$.

c) *El producto* AB *no es invertible.*

d) *El producto* AB *es invertible, solo si* $|A| = 0$ *o* $|B| = 0$.

Solución. Como las matrices A, B son invertibles, es posible calcular la inversa de la siguiente forma:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}) = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Y en forma similar:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B) = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

Tomando $C = AB$ y $D = B^{-1}A^{-1}$, se tiene que $D = C^{-1}$. □

Ejercicio 8. *Para alguna matriz* $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$, A *es invertible si y solo si:*

a) *La matriz traspuesta* A^T *es invertible, con* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

b) *La matriz* A *es simétrica, con* $(A)^{-1} = (A^{-1})^T$.

c) *La matriz traspuesta* A^T *es invertible, con* $(A^T)^{-1} \neq (A^{-1})^T$.

d) Ninguna de las anteriores.

Solución. Es posible calcular la inversa de la siguiente forma:

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = (I_n)^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T(A^T)$$

Si tomamos $C = A^T$ y $D = (A^{-1})^T$. Por tanto, la respuesta esta asociado al literal a). $\square$

Ejercicio 9. *Dada la siguiente matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz anterior es diferente de cero si:

a) $x_i \geq 0$*, para todo* $i = 1, 2, 3$.

b) $x_1 = 1$ *y* $x_2 \neq x_3$.

c) $x_i \neq x_j$*, para todo* $i, j = 1, 2, 3$*, con* $i \neq j$.

d) $x_i = x_j$*, para todo* $i, j = 1, 2, 3$.

Solución.

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_1^2 & x_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} \\ &= (x_2x_3^2 - x_2^2x_3) - (x_1x_3^2 - x_1^2x_3) + (x_1x_2^2 - x_1^2x_2) \\ &= (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Por tanto, para satisfacer que $det(A) \neq 0$ se debe cumplir que $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, es decir, el literal c) es el correcto. $\square$

Ejercicio 10. *Sean* $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}$ *con* A *invertible. Entonces* $|AB - \lambda I|$ *es igual a:*

a) $|(AB)^{-1} - \lambda I|$.

b) $|A^{-1}B - \lambda I|$

c) $|BA - \lambda I|$.

d) $|BA^{-1} - \lambda I|$.

Solución. Conociendo que la matriz A es invertible, se tiene:

$$\begin{aligned} |AB - \lambda I| &= |AB - \lambda(AA^{-1})| \\ &= |A(B - \lambda A^{-1})| \\ &= |A| \times |B - \lambda A^{-1}| \\ &= |B - \lambda A^{-1}| \times |A| \\ &= |(B - \lambda A^{-1})A| \\ &= |BA - \lambda I| \end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que la respuesta correcta corresponde al literal c). □

Ejercicio 11. *Sea* $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(R^3, R^3)$ *tal que* $\mathcal{T}(x, y, z) = (y - z, x + z, -x + y)$. *Sea* $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ *y* C *la base canónica. Podemos decir que:*

a) La transformación lineal es invertible.

b) La transformación lineal no es invertible.

c) $[\mathcal{T}]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ *y es invertible.*

d) $[\mathcal{T}]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *y no es invertible.*

Solución. Podemos calcular las imágenes de cada vector:

$\mathcal{T}(1, 1, 0) = (1 - 0, 1 + 0, -1 + 1) = (1, 1, 0) = 1.(1, 0, 0) + 1.(0, 1, 0) + 0.(0, 0, 1)$
$\mathcal{T}(1, 0, 1) = (-1, 2, 1) = -1.(1, 0, 0) + 2.(0, 1, 0) + (-1).(0, 0, 1)$
$\mathcal{T}(0, 1, 1) = (0, 1, 1) = 0.(1, 0, 0) + 1.(0, 1, 0) + 1.(0, 0, 1)$

Estas coordenadas nos proporcionan las columnas de la matriz asociada:

$$[\mathcal{T}]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de la matriz anterior es distinto de cero, entonces podemos decir que la transformación lineal es invertible y se tiene:

$$\mathcal{T}(x, y, z) = (y - z, x + z, -x + y) = (a, b, c)$$

y resolviendo el sistema se tiene:

$$\mathcal{T}(a, b, c) = \frac{1}{2}(a + b - c, a + b + c, -a + b + c)$$

Por lo que podemos concluir que el literal a) es el correcto. □

Ejercicio 12. *Para algún número racional t, se construye la matriz:*

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

Sea λ un valor propio de A_t con vector propio asociado v. Entonces:

a) $\lambda = t$

b) $\lambda^2 = t$

c) $\lambda = 1/2$

d) $\lambda^2 = t^2$

Solución. Para algún número racional t, se construye la matriz:

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

tal que su cuadrado es:

$$A_t^2 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = tI$$

Sea λ un valor propio de A_t con vector propio asociado v. Entonces por un lado se tiene:

$$A_t^2 = A_t(A_t(v)) = A_t(\lambda v) = \lambda A_t(v) = \lambda^2 v$$

Por otro lado se cumple que:

$$A_t^2(v) = tI(v) = tv$$

De este modo podemos concluir que $\lambda^2 = t$.

- $t = 1$: Entonces $\lambda^2 = 1, \lambda = \pm 1$ con un valor propio $\lambda = 1$ y un vector propio asociado $v = (1, 1)$ y valor propio $\lambda = -1$ con valor propio asociado $v = (1, -1)$

- $t = 2$: El valor propio sale de los número racionales y tenemos que $\lambda = \pm\sqrt{2}$, donde el valor propio $\lambda = \sqrt{2}$ tiene el vector propio asociado $v = (1, \sqrt{2})$ y el valor propio $\lambda = -\sqrt{2}$ tiene el vector propio asociado $v = (1, -\sqrt{2})$

$\square$

Ejercicio 13. *Sea $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V)$ un operador lineal. Identifique la opción verdadera.*

a) Los valores propios de $\mathcal{T}$ depende de la matriz asociada respecto a la base.

b) Los valores propios de $\mathcal{T}$ no depende de la matriz asociada respecto a cualquier base.

c) Los valores propios de $\mathcal{T}$ son siempre distintos dependiendo de la base.

d) Ninguna de las anteriores.

Solución. Sean S y T dos bases del espacio vectorial V y las matrices asociadas $A = [\mathcal{T}]_S$ y $B = [\mathcal{T}]_T$ a las bases, respectivamente. Sea P la matriz de cambio de base de T a S, tal que se cumple que $B = PAP^{-1}$, es decir A y B son matrices similares. De este modo podemos concluir que el literal b) es el correcto. $\square$

Ejercicio 14. *Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ una matriz cuadrada y $\mathcal{T}_A$ la transformación lineal asociada. $\mathcal{T}_A$ es invertible si y solo si:*

a) el núcleo de la aplicación lineal es de dimensión igual a n.

b) la ecuación $Ax = 0$ tiene una única solución $x \neq 0$.

c) la ecuación $Ax = 0$ tiene múltiples soluciones, con $x \neq 0$.

d) la ecuación $Ax = 0$ tiene solo la solución trivial $x = 0$.

Solución. Supongamos que $\mathcal{T}$ es invertible, entonces podemos decir que la aplicación lineal $\mathcal{T}$ es un isomorfismo. Esto implica que el núcleo de la aplicación lineal es igual a $\{0\}$ (dim=0) que puede ser expresado por $\mathcal{T}_A(x) = 0 = Ax$ determinando que existe una única solución $x = 0$. En sentido contrario, supongamos que el sistema $Ax = 0$ dispone únicamente de la solución trivial, entonces se tiene que para cualquier $x \neq 0$ el sistema $Ax \neq 0$. Ya que la dimensión del núcleo es 0 y $Ax = Im(\mathcal{T}_A)$ es de dimensión n, entonces la aplicación es un isomorfismo y A es invertible. Por tanto, podemos afirmar que la opción correcta es el literal d) $\square$

Ejercicio 15. *El límite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$$

es igual a:

a) 0.

b) $\frac{1}{2}$.

c) 2.

d) 1

Solución. Aplicando el teorema de L'Hopital, se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que la respuesta correcta es el literal c). □

Ejercicio 16. *El límite:*

$$\lim_{x\to 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}}$$

es igual a:

a) 1.

b) e^2.

c) $\frac{1}{2}$.

d) $e^{1/2}$.

Solución. Sea $y = (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$, entonces:

$$\begin{aligned} ln(y) &= ln\Big((1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}\Big) \\ &= \frac{1}{e^x-1-x} ln(1+x^2) \end{aligned}$$

Y aplicando el teorema de L'Hopital, se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} ln(y) &= \lim_{x\to 0} ln\Big((1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}\Big) \\ &= \lim_{x\to 0} \Big(\frac{ln(1+x^2)}{e^x-1-x}\Big) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-1} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^x(1+x^2)+2x(e^x-1)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Despejando y de la expresión anterior, se tiene que $\lim_{x\to 0} y = e^2$. Concluyendo de este modo que la respuesta correcta es b). $\square$

Ejercicio 17. *Dadas las funciones* $f(x) = \sqrt{x + sin^2(\pi x)}$, $g(x) = \sqrt{1+x^4}$ *y* $h(x) = \int_0^{f(x)} g(x)dx$ *. El valor de* $h'(1)$ *es:*

a) $2\sqrt{3}$.

b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) 1

Solución. Definimos $h(x) = \int_0^{f(x)} g(x)dx = G(x)|_0^{f(x)} = G(f(x)) - G(0)$. Obteniendo la derivada de la función anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} h'(x) &= G(f(x))' \\ &= g(f(x))f(x)' \\ &= \sqrt{1 + \Big(\sqrt{x+\sin^2(\pi x)}\Big)^4}\Big(\sqrt{x+\sin^2(\pi x)}\Big)' \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+\Big(x+\sin^2(\pi x)\Big)^2} \times \Big(\frac{1+2\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x)}{\sqrt{x+\sin^2(\pi x)}}\Big) \end{aligned}$$

Evaluando la función anterior en 1, se tiene $h'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, concluyendo que la respuesta correcta es c). $\square$

Ejercicio 18. *Para la secuencia* $y_n = \frac{a^n}{n!}$ *, con* $a > 0$*. El valor de* $\lim_{n\to+\infty} y_n$ *es:*

a) $\sqrt{3}$.

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) 1

d) 0.

Solución. Sea N un entero positivo tal que $N \geq 2a$. Claramente, para un entero $n > N$ se tiene $\frac{a}{n} < \frac{1}{2}$. Así:

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^N a^{n-N}}{N!(N+1)\dots n} = \frac{a^n}{N!}\frac{a}{N+1}\frac{a}{N+2}\dots\frac{a}{n} < \frac{a^n}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$$

Por lo que se obtiene:

$$0 = x_n < \frac{a^n}{n!} < z_n = \frac{a^n}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$$

Obteniendo el límite, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

Concluyendo que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$$

Por tanto, la respuesta correcta corresponde a la opción d). $\square$

Ejercicio 19. *Sea* $\{F_n\}$ *la serie de Fibonacci. El valor de*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$$

es:

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

c) $(3+\sqrt{5})$.

d) $(\frac{1}{2}+\sqrt{5})$.

Solución. Considerando la serie de Fibonacci $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, el límite puede ser expresado:

$$a = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_n + F_{n-1}}{F_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{F_{n-1}}{F_n}\right) = 1+\frac{1}{a}$$

Así, en función de la variable a se tiene:

$$a^2 = 1 + a$$

Lo que genera como solución $a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Por tanto, la solución es la opción b). □

Ejercicio 20. *La n-ésima derivada de la función $f(x) = a^x$ es:*

a) $x^a ln(a)$.

b) $a^x ln^n(a)$.

c) $ln^n(a)$.

d) $a^x + ln^n(a)$.

Solución. Podemos obtener las derivadas:

$$\begin{aligned} &f^{'}(x) = a^x ln(a) \\ &f^{''}(x) = a^x ln^2(a) \\ &f^{'''}(x) = a^x ln^3(a) \\ &\dots \end{aligned}$$

Obteniendo por inducción $f^{(n)} = a^x ln^n(a)$. Así, la respuesta es la opción b). □

Ejercicio 21. *Sea $f(x) = \cos(x)$ y $x = \sqrt{t}$. La segunda derivada de $f(x)$ es igual a:*

a) $\cos(x)\frac{1}{4t^{3/2}}dt^2 - \frac{\sin(t)}{4t}dt^2$

b) $\frac{\sin(x)}{t^{1/2}}dt - \frac{cos^2(x)}{4t}dt^2$

c) $\sin(x)\frac{1}{4t^{3/2}}dt^2 - \cos(x)\frac{1}{4t}dt^2$

d) Ninguna de las anteriores

Solución. La primera derivada de $f(x)$ puede ser expresada:

$$f^{'}(x) = -\sin(x).\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = -\sin(x).dx$$

Derivando la función anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= -\cos(x).dx^2 - \sin(x).d^2x \\ &= -\cos(x)dx^2 - \sin(x).x^{(2)}dt^2 \\ &= -\cos(x)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2 dt^2 - \sin(x)\left(-\frac{1}{4t^{3/2}}\right)dt^2 \\ &= \sin(x)\frac{1}{4t^{3/2}}dt^2 - \frac{1}{4t}\cos(x)dt^2 \end{aligned}$$

Se concluye identificando que la opción c) es la correcta. □

Ejercicio 22. *La función:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, si\ x \leq x_0 \\ ax+b, si\ x > x_0 \end{cases}$$

será diferenciable en el punto x_0:

a) si $a = 2x_0$ y $b = -x_0^2$ para que $f(x)$ sea continua en x_0.

b) si $a = b = 2x_0$.

c) si $a = 2x_0$ y $b = -x_0^2$ y $f'(x_0)$ finita.

d) si $a = x_0$ y $b = -2x_0^2$.

Solución. Para que la función f sea diferenciable en el punto x_0 es necesario y suficiente que exista una derivada finita $f'(x_0)$. Iniciamos verificando las condiciones para la continuidad de la función. Esto implica que debe existir límite en en el punto x_0, lo que determina que $a = 2x_0$ y $b = -x_0^2$. Ahora por definición de derivada se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2x_0(x_0 + \triangle x) - x_0^2 - x_0^2}{\triangle x} \end{aligned}$$

Generando una derivada finita. Así, la solución al presente problema es el literal c). □

Ejercicio 23. *Se conoce que un rectángulo dispone de un perímetro igual a α metros, con $\alpha > 0$. Las dimensiones de dicho rectángulo tal que su área sea maximizada son:*

a) ancho igual a $\frac{\alpha}{6}$ y largo igual a $\frac{\alpha}{3}$.

b) ancho igual a $\frac{\alpha}{4}$ y largo igual a $\frac{\alpha}{4}$.

c) ancho igual a $\frac{3\alpha}{8}$ y largo igual a $\frac{\alpha}{8}$.

d) ancho igual a $\frac{\alpha}{2}$ y largo igual a $\frac{\alpha}{2}$.

Solución. Sea x y y el largo y ancho del rectángulo, respectivamente. Se conoce que el perímetro esta dado por $2x + 2y = \alpha$ y se desea maximizar el área $A = x * y$ del mismo. Despejando $y = \frac{\alpha}{2} - x$ de la ecuación del perímetro y reemplazando en la ecuación del área se tiene:

$$A = x(\frac{\alpha}{2} - x) = \frac{\alpha}{2}x - x^2, \quad x \in [0, \alpha]$$

Derivando la función anterior:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\alpha}{2} - 2x = 0$$

Se obtiene que $x = \frac{\alpha}{4}$ y por tanto $y = \frac{\alpha}{4}$, determinando de este modo que la solución es seleccionar la opción b). $\square$

Ejercicio 24. *Considere la función continua en $[0, 1]$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & si\ x \in (0, 1] \\ 1, & si\ x = 0 \end{cases}$$

Determine la relación correcta:

a) $e^{-1/e} \leq \int_0^1 x^x dx \leq 1$.

b) $1/3 \leq \int_0^1 x^x dx \leq e$.

c) $\int_0^1 x^x dx \geq 1$.

d) $0 \leq \int_0^1 x^x dx \leq e^{1/2}$.

Solución. Iniciamos calculando la primera derivada de la función e igualando a cero. Así, sea $f(x) = u(x)^{v(x)}$ se tiene:

$$f(x)' = [u(x)^{v(x)}]' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

Obteniendo $f'(x) = x^x(ln(x) + 1) = 0$ y el punto crítico $x_0 = e^{-1}$. Así, evaluando $f(e^{-1}) = e^{-1/e}$ es el mínimo global de f en $[0, 1]$ y se sigue que:

$$e^{-1/e} \leq \int_0^1 x^x dx \leq 1$$

Por tanto, la respuesta correcta al presente ejercicio es el literal a). $\square$