Preguntas Examen complexivo

1. El problema de embalaje de contenedores (bin packing) puede definirse de la siguiente manera:

   Se tienen n objetos de volumen a_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Se trata de agrupar estos objetos en un número mínimo de lotes, de tal forma que cada lote pueda embalarse en un contenedor de volumen b conocido.

   1. Construya un algoritmo glotón para resolver de manera aproximada este problema.
   2. Aplique su algoritmo con:

   $$n = 6, \quad b = 10, \quad a_1 = 7, \quad a_2 = 10, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 5, \quad a_5 = 5, \quad a_6 = 3.$$

2. Una compañía marítima desea determinar una colección de rutas (eventualmente con escalas intermedias) que permitan conectar todo par de islas de un archipiélago que comprende n islas.

   Para cada par de islas i y j se conoce su distancia. Se define la *autonomía* de una ruta que une las islas i y j a lo largo de una cadena de islas $i = i_1, i_2, \ldots, i_k$ como:

   $$\text{máx}\{d_{i_1,i_2}, d_{i_2,i_3}, \ldots, d_{i_{k-1},i_k}\}.$$

   1. Proponer un algoritmo para construir rutas de manera que:
      - Haya el menor número de conexiones entre las islas.
      - Se minimice la autonomía de viaje entre dos islas cualesquiera.
   2. Aplicar el algoritmo para resolver el problema para $n = 8$ y las siguientes distancias entre las islas:

d_{ij} (km)	1	2	3	4	5	6	7	8
1	x	26	42	18	14	36	40	30
2		x	18	36	24	52	46	22
3			x	52	34	50	38	20
4					14	32	30	18
5					x	18	21	16
6						x	12	20
7							x	10

3. Una aerolínea opera una flota de 15 aviones, todos equipados con un motor del tipo JET32. La aerolínea realiza el mantenimiento y reparación de sus naves en instalaciones propias. El director de mantenimiento se encuentra actualmente revisando las políticas de compras e inventario de repuestos para los próximos tres años. El motor JET32 consiste de 4 módulos A, B, C y D. Cuando un avión llega a mantenimiento y reparación, a veces el motor completo debe ser reemplazado. Sin embargo, es más frecuente que solamente ciertos módulos deban ser sustituidos. El Cuadro 1 a continuación indica las proyecciones del requerimiento de módulos individuales y motores completos para los próximos 3 años. La aerolínea debe enviar las órdenes de compra de módulos y motores completos al inicio de cada año a JET Inc., la compañía productora del JET32. Los precios proyectados para cada módulo y para los motores completos en los próximos tres años están indicados en el Cuadro 2 a continuación. Notar que el precio de un motor completo es menor que la suma de los precios de los módulos que lo constituyen. Por otra parte, los técnicos de la aerolínea pueden desarmar un motor en sus cuatro módulos a un costo despreciable comparado con el costo de los módulos. Asumiendo que la aerolínea no tiene actualmente motores ni módulos en inventario, y que los costos de almacenamiento son despreciables, formular un programa de optimización lineal entera para decidir un plan de compras óptimo para los próximos tres años, que permita satisfacer las necesidades de mantenimiento y reparación a un costo mínimo.

Año	**Módulo A**	**Módulo B**	**Módulo C**	**Módulo D**	**Motor Completo**
1	5	4	4	2	1
2	2	1	1	7	0
3	3	4	3	0	2

Cuadro 1: Proyecciones del requerimiento de módulos y motores completos

Año	**Módulo A**	**Módulo B**	**Módulo C**	**Módulo D**	**Motor Completo**
1	0.5	2.0	5.0	1.0	7.8
2	0.6	2.2	5.5	1.1	7.5
3	0.7	2.5	6.0	1.3	7.0

Cuadro 2: Proyecciones del precio de módulos y motores completos

4. Considerar el siguiente problema de optimización no lineal

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j) \\ &\text{s.t.} \\ &\sum_{j=1}^{n} f_{i,j}(x_j) \leq b_i, \quad \forall i = 1, \ldots, m, \\ &0 \leq x_j \leq u_j, \quad \forall j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

   donde las funciones $g_j(x_j)$ y $f_{i,j}(x_j)$ son todas continuas y lineales por partes, cada una con máximo μ partes lineales. Formular este problema como un programa de optimización lineal entero.

5. Considerar un grafo dirigido $G = (V, A)$ y un vector $b \in \mathbb{R}_+^V$ de demandas sobre los nodos (donde demandas negativas indican suministros), que satisface $\sum_{i \in V} b_i = 0$. Asociado a cada arco $(i, j) \in A$ hay dos tipos de costos: un costo de transportación c_{ij}, que indica el costo de enviar una unidad de producto sobre el arco, y un costo fijo de construcción de enlace d_{ij}, que debe pagarse si el arco es utilizado para enviar algún producto desde i hasta j. La capacidad del arco (i, j) está dada por u_{ij}. Determinar un plan de transportación de costo mínimo para satisfacer todas las demandas de los nodos, tomando en cuenta los costos de transportación y los costos fijos de construcción de enlace.

6. Se requiere procesar n trabajos en m máquinas $M_1, \ldots, M_m$. Cada trabajo j debe ser procesado en las n máquinas en el orden $(M_{j(1)}, \ldots, M_{j(m)})$. A la máquina M_i le toma p_{ij} unidades de tiempo procesar el trabajo j. Cada máquina puede procesar un sólo trabajo a la vez, y una vez que ha iniciado el procesamiento de un trabajo no puede interrumpirlo. Formular un programa lineal entero para el problema de calendarizar los trabajos en las máquinas de tal manera que se minimice el tiempo en el que el último trabajo es completado.

7. Considerar el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=1}^{n} q_j x_j \leq \beta, \\
&0 \leq x_j \leq 1, \quad \forall j = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

donde los parámetros p_j y q_j son todos positivos y suman uno:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Adicionalmente, asumir que

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_n}{q_n},$$

y que el parámetro β es un número positivo pequeño. Sea

$$k := \min\{j \, : \, q_{j+1} + \cdots + q_n \leq \beta\}.$$

Denotar por y_0 a la variable dual asociada con la restricción cuyo lado derecho es β y por y_j a la variable dual asociada a la restricción que acota x_j superiormente. Empleando el Teorema de Dualidad, demostrar que las soluciones óptimas de los programas primales y duales están dados por:

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{si } j < k, \\ \frac{\beta - q_{k+1} - \cdots - q_n}{q_k}, & \text{si } j = k, \\ 1, & \text{si } j > k. \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} \frac{p_k}{q_k}, & \text{si } j = 0, \\ 0, & \text{si } 0 < j \leq k, \\ q_j \left(\frac{p_j}{q_j} - \frac{p_k}{q_k} \right), & \text{si } j > k. \end{cases}$$

8. El diccionario final del simplex para el programa lineal

$$\begin{aligned}
\max \ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t. } & 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 8 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 4x_4 \leq 12 \\
& 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 18 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

está dado por:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
z & = & 12{,}4 & - & 1{,}2x_1 & - & 0{,}2x_5 & - & 0{,}9x_6 & - & 2{,}8x_4 \\
\hline
x_2 & = & 6 & - & x_1 & & & - & 0{,}5x_6 & - & 2x_4 \\
x_3 & = & 0{,}4 & - & 0{,}2x_1 & - & 0{,}2x_5 & + & 0{,}1x_6 & + & 0{,}2x_4 \\
x_7 & = & 11{,}2 & - & 1{,}6x_1 & + & 0{,}4x_5 & + & 0{,}3x_6 & + & 1{,}6x_4,
\end{array}$$

donde las variables $x_5, \dots, x_7$ son variables de holgura. Determinar los rangos de valores de los coeficientes de la función objetivo para los cuales el diccionario dado se mantiene óptimo.

9. Una compañía de seguros cobra primas a sus clientes de acuerdo con su historial de accidentes. A un cliente que no ha tenido ningún accidente durante los dos últimos años le cobra 100 dólares de prima anual. Si un cliente ha tenido un accidente durante cada uno de los últimos dos años, la prima que se le cobra es de 400 dólares por año. Un cliente que ha tenido un accidente durante solo uno de los dos años anteriores, paga una prima de 300 dólares anuales. Un cliente que ha tenido un accidente durante el año pasado, tiene el 10 % de probabilidad de tener un accidente durante el año actual. Si un cliente no ha tenido un accidente durante el último año, existe únicamente un 3 % de probabilidad de que el año actual el cliente tenga un accidente. Durante cualquier año ¿Cuál es la prima promedio que paga un cliente de la aseguradora? Sugerencia: Construya con la información proporcionada una matriz de transición a un paso de una cadena de Markov ergódica con cuatro estados y calcule el pago esperado utilizando las probabilidades de estado estable.

10. Una persona de servicio técnico debe mantener dos máquinas en condiciones operativas. El tiempo que trabaja una máquina antes de descomponerse tiene una distribución exponencial con media de 10 horas. El tiempo que tarda la persona en componer una máquina tiene una distribución exponencial con media de 8 horas.
    (a) Demuestre que este proceso se ajusta a un proceso de nacimento y muerte, definiendo los estados, los valores de las tasas de nacimiento λ_n, los valores de las tasas de muerte μ_n y representando el diagrama de tasas correspondiente.
    (b) Calcule los valores de P_n (Probabilidades de estado estable para el n-esimo estado)
    (c) Calcule L, L_q, W, W_q, siendo L el número esperado de clientes en el sistema, L_q el número esperado de clientes en la fila de espera, W el tiempo esperado de espera en el sistema y W_q el tiempo esperado de espera en la fila.
    (d) Determine el porcentaje de tiempo que el técnico está ocupado.

11. (teórica) Demuestre que
$$L = \sum_{n=0}^{s-1}(n * P_n) + L_q + s * \left(1 - \sum_{n=0}^{s-1} P_n\right)$$
Sugerencia: utilice las definiciones estadísticas de L y L_q en términos de P_n, tome en cuenta que s representa el número de servidores y $n = 0, 1, \dots$ representa los estados posibles (número de personas en el sistema).

12. (teórica) Se dice que una matriz de transición T para una cadena de Markov es doblemente estocástica, si la suma de los elementos de cada fila es 1 y la misma condición se cumple para la suma de los elementos de cada columna, es decir $\sum\limits_{j=0}^{M} p_{ij} = 1$ para toda $i = 0, 1, \dots, M$ y $\sum\limits_{i=0}^{M} p_{ij} = 1$ para toda $j = 0, 1, \dots, M$. Si tal cadena es irreducible y aperiódica y consiste en $M + 1$ estados, demuestre que
$$\pi_j = \frac{1}{M+1}, \quad para \quad j = 0, 1 \dots, M$$
Siendo π_j la probabilidad de estado estable del j-ésimo estado y p_{ij} las probabilidades de transición condicionales a un paso.

13. Sean A una matriz definida positiva de tamaño $n \times n$ y f una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ continuamente diferenciable. Demuestre que $d = -A^\top \nabla f(u)$ es una dirección de descenso en u.

Bibliografía

[1] Hillier, F. y Lieberman, G.J. (2014). *Introduction to Operations Research. Tenth Edition.* Mc. Graw Hill Science/ Engineering/Math
[2] Carter, M. y Price, C. (2000) *Operations Research: A practical Introduction.* CRC Press.
[3] Jensen, P y Bard, J. (2003).*Operations Research. Models and Methods.* John Wiley & sons.