ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

EXAMEN COMPLEXIVO DE LA MAESTRÍA DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Fecha: Sábado 15 de noviembre de 2014. **Duración:** 4 horas

Código del maestrante:

1. Dado el siguiente problema de la mochila (knapsack):

$$(P)\begin{cases}\max z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5\\ \text{sujeto a:}\\ \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \le 6,\\ x_i \in \{0,1\}, \qquad i = 1, 2, \dots, 5.\end{cases}$$

(i) Defina un sistema de vecindades para cualquier solución factible $X = (x_1, \dots, x_5)^T$ del problema (P) y luego aplique el método de exploración local de profundo ascenso para encontrar una solución heurística de (P), a partir de:

$$X_0 = (1\ 0\ 1\ 0\ 0)^T$$

(ii) Calcule la solución exacta de (P) por el método de la Programación Dinámica.

2. Sea $R = (V, E; d)$ una red orientada donde:

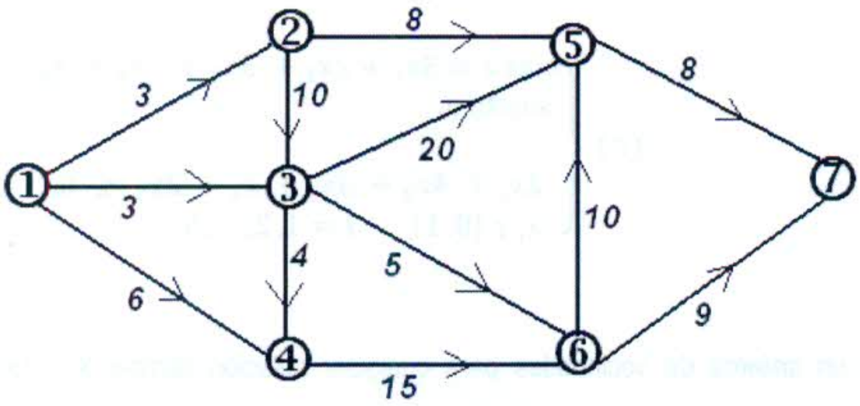
- $G = (V, E)$ es un grafo simple, conexo y orientado, con un conjunto de vértices V y un conjunto de arcos E.
- $d: E \to \mathbb{R}$ es un sistema de ponderación de los arcos (i, j) de E.

(i) Supongamos que s es una raíz de G y que $\pi(i)$ representa la distancia más corta de s a i para cualquier nodo $i \in V$.

Demuestre que:

P es un camino más corto de la raíz s a un nodo $x \in V$ si y sólo sí $\pi(j) = \pi(i) + d(i,j)$ para todo arco (i,j) en P.

(ii) Por el método de Ford-Bellman, encuentre la arborescencia de caminos más cortos desde la raíz $s = 1$ en la siguiente red acíclica:



3. Considerar el siguiente problema de planificación para la producción de un único producto sobre un horizonte de T períodos. Para $t = 1, \dots, T$, la demanda estimada del producto durante el período t es igual a d_t. Si se decide producir en el período t, se incurre en un costo fijo de c_t, además de un costo variable de p_t por unidad de producto. Finalmente, el costo de almacenamiento de cada unidad de producto durante el período t es igual a h_t.

(i) Formular un programa lineal entero para determinar los niveles de producción que permitan cubrir la demanda estimada a un costo mínimo.

(ii) Suponer que es posible dejar demanda sin satisfacer en cualquier período, excepto en el período T, incurriendo para ello en un costo. Sea b_t el costo por cada unidad de demanda insatisfecha en el período t. Indicar cómo esta nueva restricción puede ser incorporada en el modelo anterior.

(iii) Suponer que $T > 5$, pero que la producción puede tener lugar máximo en cinco períodos de tiempo dentro del horizonte de planificación. Indicar cómo esta nueva restricción puede ser incorporada en el modelo.

4. El algoritmo de Clark y Wright es un método heurístico glotón para la construcción de un conjunto de rutas de vehículos de capacidad C, que comienzan y terminan en un depósito, con el objetivo de satisfacer la demanda de n clientes de un producto determinado.

Considerar una red no dirigida $R = (V, E; d; r)$ donde:

- $G = (V, E)$ es un grafo simple no dirigido tal que $V = \{0,1, \dots, n\}$ es el conjunto de $n + 1$ vértices. Se considerará que el vértice 0 es un depósito para los vehículos y el producto, y que los otros vértices corresponden a las localizaciones de n clientes.
- El conjunto $E = \{(i,j) / \ i, j \epsilon V\}$ contiene las aristas del grafo, y $d: E \to \mathbb{R}^+$ es una función de ponderación de sus aristas.
- Para cada $i \in \{1,2, \dots, n\}$, el valor de r_i corresponde a la demanda del cliente i.

Se pide encontrar un conjunto de rutas de servicio, cada una de las cuales debe empezar y terminar en el nodo depósito 0. Cada cliente debe ser atendido exactamente por una ruta, y la suma de las demandas de los clientes atendidos en una ruta específica no puede superar la capacidad C de un vehículo. Finalmente, las rutas seleccionadas deben minimizar la función de ponderación d, es decir, $\sum d(i,j)$ debe ser mínimo sobre las aristas empleadas por el conjunto de rutas.

El algoritmo de Clark y Wright se basa en realizar la FUSIÓN iterativa de rutas. Considerar dos rutas, descritas por sus vértices: $R_1 = (0, i_1, i_2 \dots, \ i_p, 0)$ y $R_2 = (0, j_1, j_2 \dots, \ j_q, 0)$. Los vértices i_1 e i_p se denominan vértices *terminales* de la ruta R_1, y los vértices j_1 y j_q son los *terminales* de la ruta R_2. La fusión de R_1 y R_2 es una nueva ruta obtenida al conectar directamente un terminal de R_1 con un terminal de R_2. Por ejemplo, si usamos los vértices terminales i_p y j_q para fusionar las dos rutas R_1 y R_2 obtenemos la nueva ruta $R_{pq} = (0, i_1, i_2 \dots, i_p, j_q, \dots, j_2 j_1, 0)$. Notar que al usar R_{pq} en lugar de R_1 y R_2 se produce un *ahorro* en la función objetivo igual a $s_{pq} = d(0, i_p) + d(0, j_q) - d(i_p, j_q)$. Es decir, la fusión de rutas permite encontrar soluciones factibles con un mejor valor, siempre y cuando la capacidad C de un vehículo sea suficientemente grande como para satisfacer la suma de las demandas de los clientes que están en la nueva ruta fusionada R_{pq}.

Algoritmo de Clark y Wright

Paso 0: Construya n rutas de la forma $R_i = (0, i, 0)$ para $i = 1, \dots, n$.

Calcule todos los ahorros de la forma $s_{ij} = d(0,i) + d(0,j) - d(i,j)$ para todo $i, j = 1, \dots, n$ con $i < j$ y ordénelos en forma descendente.

Paso k: Mientras existan rutas cuya fusión (por un par de terminales) conduzca a una nueva ruta factible de menor costo, realice la fusión que produzca el mayor ahorro posible.

Aplique la Heurística de Clark y Wright para resolver el siguiente problema:

La siguiente tabla muestra la distancia simétrica (en km) entre 10 ciudades diferentes C1,..., C10.

	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
C1	8	5	9	12	14	12	16	17	22
C2		9	15	17	8	1	18	14	22
C3			7	9	11	7	12	12	17
C4				3	17	10	7	15	18
C5					8	10	6	15	15
C6						9	14	8	16
C7							8	6	11
C8								11	11
C9									10

Una agencia de viajes emplea a una imprenta que se encuentra localizada en la ciudad C7 para elaborar sus plegables informativos. Cada fin de mes, la imprenta emplea su flota homogénea de camiones para hacer la distribución de los plegables desde su local a las otras 9 ciudades. El número de paquetes requeridos mensualmente por cada ciudad está dado en la siguiente tabla:

Ciudad	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C8	C9	C10
Paquetes requeridos	10	15	18	17	3	5	9	4	6

Un camión puede cargar máximo 40 paquetes. Determinar las rutas óptimas para la entrega de paquetes.

5. Considerar el siguiente programa lineal:

$$\begin{cases} \max c^T x \\ \text{sujeto a:} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Donde $c \in \mathbb{Z}^n, b \in \mathbb{Z}^m$ y $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Demostrar que este programa admite una solución óptima si y sólo si el siguiente conjunto es no vacío:

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n \times m}: c^T x = b^T y,\ Ax \leq b,\ \ A^T y \geq c,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

6. Considere el siguiente problema de programación no lineal:

$$(P) \begin{cases} \min z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \\ \text{sujeto a :} \\ x_2 \geq x_1^2 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(i) Dibuje en el plano el conjunto factible de (P).

(ii) Escriba la condición necesaria de optimalidad de Kuhn-Tucker y verifique que se cumple para el punto $(2{,}4)$.

(iii) Es este punto un óptimo local? Por qué?

7. La densidad conjunta de las variables aleatorias X, Y está dada por.

$$f(x, y) = \frac{e^{-y}}{y}\ ,\quad 0 < x < y,\quad 0 < y < \propto$$

(i) Calcular: $\mathrm{E}\,(\mathrm{X}^2/\mathrm{Y} = \mathrm{y})$

(ii) Expresar: $\mathrm{E}\,(\mathrm{X}^2/\mathrm{Y} = \mathrm{y})$ y $\mathrm{E}\,(\mathrm{X}^2)$.

NOTA: Todas las preguntas se calificarán sobre 10 puntos