Ejemplos de reactivos resueltos para el examen de media carrera
Carrera de Matemática – Semestre 2019-B

1. **Fundamentos de la Matemática**

   1. Sean S, T, U conjuntos no vacíos, y $f : S \to T$ y $g : T \to U$ funciones tales que la función $g \circ f : S \to U$ es inyectiva. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es siempre cierta?
      (a) f es inyectiva.
      (b) g es sobreyectiva.
      (c) f y g sean sobreyectivas.
      (d) g es inyectiva.

      Solución

      Sean x, $y \in S$ con $f(x) = f(y)$. Aplicamos g y obtenemos $g(f(x)) = g(f(y))$. La última igualdad es equivalente a $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Puesto que $g \circ f$ es inyectiva, tenemos que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ implica $x = y$.

      En consecuencia, la respuesta es (a).

   2. Indicar cuál de las siguientes equivalencias lógicas es una tautología.
      (a) $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow p$
      (b) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow r \Rightarrow p$
      (c) $[(p \vee q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$
      (d) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$

   Solución

   La opción (a) se descarta porque si p es F y q es F tenemos que la proposición es F, y en consecuencia no es tautología.

   La opción (b) nos da una proposición ambigua y en consecuencia no podemos afirmar si es no tautología.

   La opción (c) es F cuando p es V y q es F. Por lo tanto, descartamos la opción (c).

   La respuesta debe ser (d) de lo cual nos aseguramos que así es luego de notar que lo que está en el corchete, por ley de Morgan, es equivalente a $\neg p \wedge q$. Finalmente, se puede ver por simple cálculo o por tabla que la proposición $(\neg p \wedge q) \Rightarrow q$ es una tautología.

2. **Análisis Real**

   1. Sea A el conjunto de los números irracionales de el intervalo $[0, 1]$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
      (a) A es abierto
      (b) A es cerrado
      (c) A no es abierto ni cerrado
      (d) A es compacto.

      Solución

      A no es abierto ya que si $a \in A$, todo intervalo abierto que contiene a y está contenido en $[0, 1]$ contiene racionales e irracionales.

      A no es cerrado ya que si b es un racional de $[0, 1]$ entonces todo intervalo que contiene b interseca a A.

      En consecuencia, la opción (c) es la correcta.

2. La ecuación $4x^3 + 5x - 16 = 0$ tiene ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   (a) no tiene soluciones reales.
   (b) tiene exactamente una solución real.
   (c) tiene exactamente dos soluciones reales.
   (d) tiene exactamente tres soluciones reales.

Solución

Definimos la función $f(x) = 4x^3 + 5x - 16$. Dado que $f(0) < 0$ y $f(2) > 0$, el teorema de Bolzano garantiza al menos una solución. Supongamos que hubiera más de una solución. Sean x_1 y x_2 dos de ellas con $x_1 < x_2$. Puesto que $f(x_1) = f(x_2) = 0$ y f es continua y derivable en todo punto, el teorema de Rolle permite concluir que existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que $f'(c) = 0$. Sin embargo, $f'(x) = 12x^2 + 5 > 0$ para todo x. Concluimos que no hay más de una solución. En consecuencia elegimos la opción (b).

3. **Análisis Complejo**

1. Sea $f(\theta) = |e^{i\theta}|^2$, $\theta \in \mathbb{R}$. Se tiene que $\frac{df(\theta)}{d\theta}$
   (a) es igual a $2i|e^{i\theta}|$.
   (b) es igual a $2e^{i\theta}$.
   (c) es igual a 0
   (d) No existe

   Solución Puesto que $e^{i\theta)} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}(\theta)$, $f(\theta) = \cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta) = 1$. Por tanto, $\frac{df(\theta)}{d\theta} = 0$ y la opción (c) es la correcta.

2. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$$

   (a) converge uniformemente para $|z| > 1$.
   (b) converge uniformemennte para $|z| \leq 1$.
   (c) converge uniforme para todo $z \in \mathbb{C}$
   (d) no converge uniformemente para ningún valor de z

   Solución

   Sea $f_n(z) = \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$. Tomando valor absoluto y acotando tenemos $|f_n(z)| = \frac{|z|^n}{n\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ para $|z| \leq 1$. Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge, el criterio M de Weierstrass nos da la convergencia uniformemente de la serie original para $|z| \leq 1$ y por tanto elegimos la opción (b).

Elaborado por: Dr. Francisco Lara