EJEMPLOS REACTIVOS DE DESARROLLO
EXAMEN DE FIN DE CARRERA
CARRERA DE MATEMÁTICA
SEMESTRE 2016-B

1. Considere $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es continua}\}$ dotado de la norma $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$. Además, sea $F : C[-1,1] \to \mathbb{R}$, el funcional definido por $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(\pi\tau)x(\tau)\, d\tau$. Pruebe que el funcional lineal F es acotado y halle $\|F\|$.

2. Sean X e Y dos espacios euclídeos y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado. Pruebe que si $\mathbf{0}$ es el operador cero entonces:
   (a) $T = \mathbf{0} \Leftrightarrow \langle Tx, y\rangle = 0,\ \forall x \in X$ e $y \in Y$.
   (b) Si X es complejo, $Y = X$ y $\langle Tx, x\rangle = 0,\ \forall x \in X \Rightarrow T = \mathbf{0}$.

3. Sean $A = [-1,1] \times [-1,1]$ y
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si} \quad x^2+y^2 > 0 \\ 0, & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$
   (a) Calcule
$$\int_{-1}^{1} f(x,y)dx, \qquad \int_{-1}^{1} f(x,y)dy$$
   (b) ¿Existe la integral doble en el sentido de Lebesgue en A? Justifique su respuesta e indique si se cumple el Teorema de Fubini.

4. Encontrar la solución del problema de Ecuaciones Diferenciales Parciales siguiente:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (x,y,t) \in]0,1[\times]0,7[\times]0,+\infty[\\ u(x,y,0) = \sin(31\pi x)\sin(\frac{9\pi y}{7}) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = 0 \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = u(x,7,t) = 0 \end{cases}$$

5. Probar que el siguiente problema de valores al borde posee una solución débil
$$\begin{cases} -\Delta u + (3\sin(\|x\|) + 41)u = x_N^2 + e^{-\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2}, & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$
   donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y regular.

6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9$.
   (a) Halle un punto estacionario de f.
   (b) Verifique que el punto hallado es un mínimo local.
   (c) Muestre que el punto estacionario es un mínimo global de f.

7. **Dualidad-Lagrangiana:** Establecer los problemas duales del problema lineal y del problema cuadrático, respectivamente.

$$(LP) : \text{mín}\, c^T x \quad \text{sujeto a:} \quad Ax = a,\ x \geq 0.$$

$$(QP) : \text{mín}\, \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \quad \text{sujeto a:} \quad Ax \leq a,\ Bx = b,$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica definida positiva, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y los vectores $c \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^p$.

Sugerencia: considere las características propias de cada problema para establecer su dual de forma simplificada.