EJEMPLOS REACTIVOS OPCIÓN MÚLTIPLE
EXAMEN DE FIN DE CARRERA
CARRERA DE MATEMÁTICA
SEMESTRE 2016-B

1. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y d la métrica asociada. Entonces:
   (a) Existe siempre $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto escalar al cual está asociada la norma $\|\cdot\|$.
   (b) El espacio métrico (X, d) es completo.
   (c) (X, d) es isomorfo a un espacio métrico completo distinto de (X, d).
   (d) Existe un espacio vectorial normado $(Y, \|\cdot\|_1)$ isomorfo a $(X, \|\cdot\|)$ e incompleto.

2. Sean (X, d) un espacio métrico y $M \subseteq X$, $M \neq \emptyset$. Para $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x)$ denotará la bola abierta centrada en x y de radio ε. Entonces:
   (a) M es cerrado $\Leftrightarrow [\forall\, x \in M,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, y \in M \setminus \{x\}$ tal que $y \in B_\varepsilon(x)]$
   (b) M es cerrado $\Leftrightarrow \left[\forall\, x \in \overline{M},\ \exists\ (x_n) \in M^\infty \text{ tal que } d\,(x_n, x) \to 0\right]$
   (c) M es cerrado $\Leftrightarrow [\forall\ (x_n) \in M^\infty,\ x_n \to x \Rightarrow x \in M]$
   (d) M es cerrado $\Leftrightarrow [\forall\ (x_n) \in M^\infty,\ \exists\, x \in M$ tal que $x_n \to x]$

3. Considere $\mathscr{P}([0,1])$ el espacio vectorial de los polinomios definidos sobre $[0,1]$ al cual lo equipamos con la norma $\|p\| = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |p(x)|$ y sea $T : \mathscr{P}([0,1]) \to \mathscr{P}([0,1])$ el operador definido por $Tp := \frac{d^2p}{dx^2} + 3\frac{dp}{dx} + 2p$. Entonces T es un operador lineal:
   (a) cerrado pero no continuo.
   (b) continuo pero no cerrado.
   (c) continuo y cerrado.
   (d) ni cerrado ni continuo.

4. Sean $\mathbb{K}$ un campo de escalares (real o complejo), E un espacio normado y $f : \mathbb{K} \to E$ una función Gâteaux diferenciable en $\mathbb{K}$. Entonces f es:
   (a) Fréchet diferenciable en $\mathbb{K}$.
   (b) continua en $\mathbb{K}$.
   (c) continuamente diferenciable en $\mathbb{K}$.
   (d) ninguna de las anteriores.

5. Sean $D \subseteq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y $f : D \to \mathbb{C}$ una función compleja. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:
   (a) Si f es holomorfa en D, entonces para cualquier contorno cerrado Γ (no necesariamente simple) contenido en D, se tiene que $\oint\limits_\Gamma f(z)dz = 0$.
   (b) Si f es holomorfa y acotada en $D = \mathbb{C}$, entonces f es una función constante.
   (c) Si f es diferenciable en D, entonces f es holomorfa en D.
   (d) Si f es continua en D y existe un contorno cerrado Γ contenido en D tal que $\oint\limits_\Gamma f(z)dz = 0$, entonces f es holomorfa en D.

6. Considere $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach y E' su espacio dual. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es correcta?
   (a) La topología débil estrella $\sigma(E', E)$ es metrizable en la bola unidad cerrada $B_{E'}$.
   (b) Toda sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en E' admite una subsucesión que converge en sentido débil estrella.

(c) Toda sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en E' admite una subsucesión que converge en sentido débil.

(d) La bola unidad cerrada $B_{E'}$ en el espacio dual E' es compacta para la topología débil estrella $\sigma(E', E)$.

7. Considere $(H, \|\cdot\|_H)$, un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$, un operador auto-adjunto compacto. Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son los valores propios de T, entonces

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = 1$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = +\infty$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$.

(d) $|\lambda_n| > \|T\|_{\mathcal{L}(H)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

8. Sea $H : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$H(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x)dx, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Entonces $\frac{dH}{dx}$ en el sentido de las distribuciones es igual a:

(a) cero.

(b) la identidad.

(c) φ.

(d) el delta de Dirac.

9. Sean δ la distribución delta de Dirac, H la función de Heaviside y c_1, c_2 y c_3 constantes cualesquiera. La ecuación diferencial:

$$x^2 \frac{du}{dx} = 0$$

tiene la siguiente solución en el sentido de las distribuciones:

(a) $u(x) = c_1\delta(x) + c_2H(x) + c_3$.

(b) $u(x) = x + H^2(x)$.

(c) $u(x) = x^2 + c_1$.

(d) $u(x) = \delta^2(x)$.

10. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado suficientemente regular. Sea $\alpha(\cdot,\cdot)$ la forma bilineal sobre $H_0^1(\Omega)$, definida como :

$$\alpha(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$\alpha(u, v) := \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega \beta(x)u(x)v(x)\, dx,$$

donde $\beta(x) = \cos(\|x\|) + \lambda$. Entonces $\alpha(\cdot,\cdot)$ es coercivo si λ es:

(a) $0 < \lambda < \frac{1}{3}$.

(b) $\lambda < 0$.

(c) $\lambda > 1$.

(d) $\frac{1}{3} < \lambda < \frac{1}{2}$.

11. Considere f una función definida de la siguiente manera

$$f :]-1,1[\to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \\ -2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Marcar la proposición correcta:
 (a) $f \in W^{1,2}(]-1,1[)$.
 (b) $f \in L^2(]-1,1[)$.
 (c) $f \in C^1(]-1,1[)$.
 (d) $f \in C(]-1,1[)$.

12. Considere el espacio $C([-1,1])$ dotado del producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Entonces el polinomio de Legendre P_7 de grado 7 es ortogonal a $g \in C([-1,1])$ si:
 (a) $g(x) = x^8 + 12x^7 - 4x^5 + 25$.
 (b) $g(x) = x^7 + 31$.
 (c) $g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$.
 (d) $g(x) = x^{31} + 1231x + 61$.

13. Sea $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ una base ortonormal para el espacio $C([2,7])$ dotado del producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{2}^{7} f(x)g(x)dx.$$

Dado el desarrollo en serie de Fourier para h, $h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$, donde

$$h : [2,7] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h(x) = x,$$

entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ es igual a
 (a) 351.
 (b) 335.
 (c) $\frac{351}{3}$.
 (d) $\frac{335}{3}$.

14. Dado el problema: encontrar

$$u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$(x, y, t) \longmapsto u(x, y, t)$$

tal que verifique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \text{en} \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, y, 0) = f(x, y) & \text{en} \quad \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

con f dado en el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. ¿Cuál cree usted que sería la mejor estrategia para enfrentar este problema?

(a) Aproximación de Galerkin-Riez.

(b) Transformada de Fourier.

(c) Teorema Hille-Yosida.

(d) Teorema de Lions.

15. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, acotado, convexo y regular, y $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que verifique

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u = g & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

donde $g \geq 0$ pero no nula sobre $\partial\Omega$. Entonces u en Ω es:

(a) positiva.

(b) no positiva.

(c) cero.

(d) negativa.

16. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x) \neq 0$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica definida positiva que produce una norma asociada en $\mathbb{R}^n$

$$\|p\|_A := \sqrt{p^T A p}$$

y $\|\cdot\|_2$ la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$. Usando la factorización $A = L^T L$, la dirección del profundo descenso correspondiente a $\|\cdot\|_A$, es decir, la solución de

$$\min_{\|p\|_A = 1} \nabla f(x)^T p,$$

es:

(a) $p = -\frac{A^{-1}\nabla f(x)}{\|A^{-1}\nabla f(x)\|_2}$.

(b) $p = -\frac{L^{-1}L^{-T}\nabla f(x)}{\|L^{-T}\nabla f(x)\|_2}$.

(c) $p = -\frac{L^{-T}\nabla f(x)}{\|L^{-T}\nabla f(x)\|_2}$.

(d) Ninguna de las anteriores.

17. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo tal que

$$b^T x + \beta \neq 0, \quad \forall\, x \in X$$

y $f : X \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{a^T x + \alpha}{b^T x + \beta}$ ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdad?

(a) f es convexa.

(b) f es cuasi-convexa.

(c) f es pseudo-convexa.

(d) f es estrictamente convexa.

18. Sean $s, y \in \mathbb{R}^n$, $B, H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrices simétricas tales que $H = B^{-1}$. Considere la matriz

$$B_+ = B + \frac{(s - By)(s - By)^T}{(s - By)^T y}.$$

¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a la inversa de B?

(a) $H_+ = H + \frac{(y - Hs)(y - Hs)^T}{s^T(y - Hs)}$.

(b) $H_+ = H + \frac{(y-Hs)(y-Hs)^T}{(y-Hs)^T(y-Hs)}$.

(c) $H_+ = H + \frac{(y-Hs)(Hs)^T}{s^T(y-Hs)}$.

(d) Ninguna de las anteriores.

19. Estamos interesados en encontrar la distancia más corta desde un punto x_0 al hiperplano $\{x : Ax = b\}$, donde A tiene rango completo por filas. Formulando este problema como uno de tipo cuadrático, ¿cuál de las siguientes opciones representan la solución del problema y su multiplicador de Lagrange asociado?

(a) $x^* = x_0 + A^T(AA^T)^{-1}(b - Ax_0)$; $\lambda^* = (AA^T)(Ax_0 - b)$.

(b) $x^* = A^T(AA^T)^{-1}(b - Ax_0)$; $\lambda^* = (b - Ax_0)^T(AA^T)$.

(c) $x^* = A^T(AA^T)^{-1}(b - Ax_0)$; $\lambda^* = (AA^T)^{-1}(b - Ax_0)$.

(d) $x^* = x_0 + A^T(AA^T)^{-1}(b - Ax_0)$; $\lambda^* = (AA^T)^{-1}(b - Ax_0)$.

20. Sean A y B conjuntos convexos no vacíos. ¿Cuál de los siguientes enunciados no es correcto?

(a) $A + B$ es convexo.

(b) $conv(A + B) = conv(A) + conv(B)$.

(c) $A \cup B$ es convexo.

(d) $A \cap B$ es convexo.

21. Considere el problema de optimización

$$(P) \begin{cases} \text{mín} \quad -x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a:} \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

¿Cuál de los siguientes enunciados no es correcto?

(a) El mínimo de (P) se alcanza en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

(b) Se verifica la condición de calificación LICQ.

(c) El mínimo de (P) se alcanza en: $(1, 0), (0, 1)$.

(d) Se verifica la condición de calificación MFCQ.

22. Considere una función real f para la cual f'' es continua y $f(x) = 0 \neq f'(x)$. Si e_n representa el error del método de Newton en el n-ésimo paso, entonces $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}e_n^{-2}$ es igual a

(a) $\frac{f''(x)}{2f'(x)}$.

(b) 0.

(c) $f(0)$.

(d) $\frac{f''(0)}{2f'(0)}$.

23. Sea A una matriz cuadrada para la cual se calcula su factorización QR. Asumiendo que el método del Gradiente aplicado a la función

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^\top R^\top QRx - b^\top Rx,$$

converge, ¿cuál es el sistema lineal que resuelve?.

(a) $Ax = b$.

(b) $\frac{1}{2}A^\top Rx + \frac{1}{2}R^\top Ax = R^\top b$.

(c) $(A + A^\top)x = b$.

(d) $R^\top QRx = R^\top b$.

24. El número de condición normado de una matriz es:
   (a) Mayor o igual que 1.
   (b) Mayor o igual que 1 siempre que la norma sea una norma inducida.
   (c) Mayor que 1.
   (d) No negativa.

25. Sea $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ un espacio con medida, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Se define

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si} \quad n \leq x \leq n + \dfrac{1}{n} \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

   Entonces:
   (a) Se satisface el Lema de Fatou.
   (b) Se satisface el Teorema de Convergencia Acotada.
   (c) Se satisface el Teorema de Lebesgue sobre Convergencia Monótona.
   (d) Se satisface el Teorema de Lebesgue sobre Convergencia Dominada.

26. Para la topología cofiinita, $\mathbb{Z}$ es:
   (a) compacto y no conexo.
   (b) ni conexo ni compacto.
   (c) compacto y conexo.
   (d) conexo y no compacto.

27. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
   (a) $\mathbb{Z}_{15}^\times$ (el grupo de elementos invertibles en $\mathbb{Z}_{15}^\times$ es cíclico).
   (b) El máximo común divisor entre dos números consecutivos de la sucesión de Fibonacci es 1.
   (c) El anillo $\mathbb{Z}_{15}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.
   (d) Todo campo tiene exactamente dos ideales